Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Kurssin yleistiedot

Kurssin verkkosivu

Perehdy nettisivun informaatioon:
https://users.utu.fi/mikhirve/ins2425/Perustiedot/

Luennot ja demot

Luennot ti 14-16 ja ke 14-16 yleensä etäyhteydellä.
Demoajankohdat to 8-10, 10-12, 12-14, 14-16 tai 16-18. Kaikkia ryhmiä ei toteuteta. Suoritustavoista ja poikkeuksista kerrotaan kurssin nettisivulla.

Kurssin suoritus

Demotehtävistä suoritettava vähintään 40% ja läpäistävä lopputentti. Suoritus on myös mahdollista harjoituksia tekemällä.

Tenttipäivät

Ilmoitetaan myöhemmin.

Kurssin yleistiedot

Tavoitteet

Kurssilla esitetään matematiikan peruskäsitteitä: Logiikan merkinnät, reaaliluvut, elementaariset reaalifunktiot, ja kompleksiluvut. Nämä luovat pohjaa seuraavia insinöörimatematiikan kursseja varten.

Sisältö

Matematiikan merkintöjä, tavallisimmat reaalifunktiot, kompleksiluvut.

Matematiikasta

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Matematiikan historiaa

- Laskutaito n. 35000 vuotta sitten.
- Abstrakti matematiikka n. 4000 vuotta sitten (Egypti).
- Kreikkalainen kukoistuskausi n. 300–100 eaa.
- Uuden ajan matematiikka 1600-luku $\rightarrow$ nykypäivä.

- Matematiikka ei ole luonnontiede
- Ei operationaalista kytkentää reaalimaailmaan
- Onko

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

  "totta"?

Matematiikan perusteista

- Kaikki matemaattiset teoriat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa.
- Teorian peruskäsitteet ja -oliot esitetään määritelminä ja niiden väliset suhteet tai *aksioomina*.
- Kaikki muut teorian väittämät (lauseet, teoreemat) johdetaan aksioomista loogisesti.
- Matemaattinen teoria: Niiden lauseiden joukko, jotka voidaan johtaa aksioomista.

Matematiikan perusteista

Vaatimuksia aksiomatiikalle

- Peruskäsitteiden ja aksioomien pitäisi olla yksinkertaisia
- Aksioomia pitäisi olla vähän
- Aksioomien pitäisi olla ristiriidattomia

Peanon aksiomatisointi luonnollisille luvuille

Peruskäsitteet: Joukko $\mathbb{N}$, luku $1 \in \mathbb{N}$ ja luvun *n seuraaja* $s(n)$.
Aksioomat:

1. Jos $n \neq m$, niin $s(n) \neq s(m)$ (kahdella eri luonnollisella luvulla on eri seuraaja).
2. Kaikille joukon $\mathbb{N}$ alkioille n pätee $s(n) \neq 1$ (ykkönen ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja).
3. Jos joukko A sisältää luvun 1 ja jokaisen sisältämänsä luvun seuraajan, niin silloin A sisältää kaikki luonnolliset luvut (*induktioaksiooma*).

Loogisesta päättelystä

Päättelyn muotoja

- Deduktiivinen
- Induktiivinen
- Abduktiivinen

- Matematiikka rakennetaan yksinomaan deduktiivisen päättelyn turvin
- Luonnontieteissä induktiivinen päättely on tyypillistä

Loogisesta päättelystä

Deduktiivinen päättely

- Äärellinen määrä päättelysääntöjä
- Oletusten ollessa tosia ovat johtopäätökset tosia
- "Loogisesti sitova"

Modus ponens

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi}$$

Syllogistinen logiikka

Aristoteles (384–322 eaa)

Loogisesta päättelystä

Syllogistinen logiikka

Premisseistä päätellään johtopäätös. Premissejä voi olla kaksi: Pääpremissi ja alipremissi

Esimerkki

$$\frac{\text{Sokrates on ihminen}}{\text{Sokrates on kuolevainen}}$$

Huomautus

Johtopäätös ei seuraa premississtä!

Loogisesta päättelystä

Esimerkki

$$\frac{\underset{\text{(pääpremissi)}}{\text{Jokainen ihminen on kuolevainen}} \qquad \underset{\text{(alipremissi)}}{\text{Sokrates on ihminen}}}{\underset{\text{(johtopäätös)}}{\text{Sokrates on kuolevainen}}}$$

Huomautus

Johtopäätös seuraa premisseistä.

Merkintöjä

Kreikkalaiset aakkoset

alfa	A	α	iioota	I	ι	rhoo	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ, $\varkappa$	sigma	Σ	σ, ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	myy	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	nyy	N	ν	fii	Φ	ϕ, φ
zeeta	Z	ζ	ksii	Ξ	ξ	khii	X	χ
eeta	H	η	omikron	O	o	psii	Ψ	ψ
theeta	Θ	θ, ϑ	pii	Π	π, ϖ	oomega	Ω	ω

Logiikan merkintöjä

- $\wedge$ (konjunktio eli looginen ja)
- $\vee$ (disjunktio eli looginen tai)
- $\neg$ (negaatio eli looginen ei)
- $\rightarrow$ (implikaatio eli looginen seuraus)
- $\forall$ (universaalikvanttori)
- $\exists$ (eksistentiaalikvanttori)

Logiikan merkintöjä

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.
- Kaava $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ väitää, että on olemassa sellainen x, että kaikille y:ille $y \leq x$
- Kaava $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x-3| < \delta \to \left|x^2 - 9\right| < \epsilon)$ väittää, että jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen positiiviluku δ, että ehdosta $|x-3| < \delta$ seuraa $\left|x^2 - 9\right| < \epsilon$.

Joukko-oppi

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaatiosymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$
- Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x, jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$

Joukko-oppi

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Määritelmä

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (yhtäsuuruus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ (osajoukko)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (yhdiste eli unioni)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (leikkaus eli intersektio)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (erotus eli differenssi)
- $A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A)$ (tyhjä joukko)

Joukko-oppi

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin. Esimerkiksi voidaan sopia, että $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{\emptyset\} \leftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow 3$, jne.
- Vain yksi relaatiosymboli $\in$ tarpeen, muut määritellään siihen perustuen.
- Erittäin yksinkertainen teoreettinen perusta matematiikalle.

Joukko-oppi

Tärkeimmät lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.

Joukko-oppi

Lukuvälit

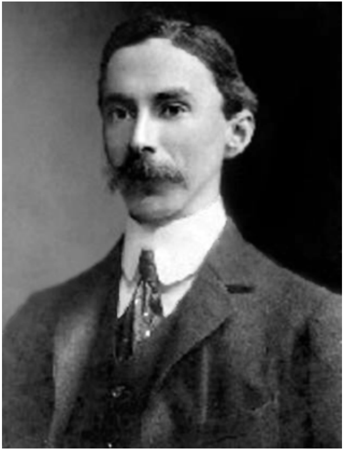
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli, analogisesti $(a, b]$)
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (suljettu puolisuora, analogisesti $(-\infty, a]$)
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (avoin puolisuora, analogisesti $(-\infty, a)$)

Gottlob Frege

Gottlob Frege (1848—1925)

- Propositio- ja predikaattilogiikka
- Matematiikan perusteet: Grundgesetze der Arithmetik (vol. 1 (1893), vol. 2 (1903))

Russellin paradoksi (1901)



Bertrand Russell (1872–1970)

Olkoon $A = \{X \mid X \notin X\}$. Onko $A \in A$?