Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Merkintöjä

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Huomautus

Summamerkinnässä 1 on summauksen alaraja, n yläraja ja i summausindeksi. Summausindeksin valinta ei ole tärkeä, vaan

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Merkintöjä

Summamerkinnän käsittely

- $$c\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i$$
- $$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$$
- $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$
- $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$

Binomikaava

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

$n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n alkiota voidaan järjestää jonoon: Ensimmäistä alkiota kohti on n mahdollisuutta, toista kohti $n-1$, jne.

Esimerkki

Luvut $\{1, 2, 3\}$ voidaan järjestää jonoon $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:lla tavalla: 123, 132, 213, 231, 312 ja 321.

Binomikaava

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkiota n:stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkiota n:stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkiota voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k!\binom{n}{k}$. Siis

$$
\begin{aligned}
& k!\binom{n}{k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\
= \quad & \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \ldots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \\
\Rightarrow \quad & \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Binomikaava

Esimerkki

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{7! \cdot 33!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{7!} = 18643560$$

Binomikaava

Esimerkkejä

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$\binom{m}{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = \binom{m}{k},$$

$$\binom{m}{m} = \binom{m}{m-m} = \binom{m}{0} = 1$$

Binomikaava

Lause

Jos $1 \leq n \leq m-1$, niin

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Todistus

$$\begin{aligned}
\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} &= \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} \\
&= \frac{(m-1)!(m-n+n)}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)!}{n!(m-n)!} \\
&= \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.
\end{aligned}$$

Binomikaava

Pascalin kolmio

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Binomikaava

Binomikerroin

Olkoot $a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(aa+ab+ba+bb) \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a+b)^n = aa\ldots aa + aa\ldots ab + aa\ldots ba + \ldots + bb\ldots bb$$

Binomikaava

Binomikerroin

Olkoot $a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= aa\ldots aa + aa\ldots ab + aa\ldots ba + \ldots + bb\ldots bb \\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k
\end{aligned}
$$

- $C(n,k)$ on niiden yhteenlaskettavien määrä, jossa on k kpl b:tä.
- Kuinka monella tavalla voidaan valita n-pituisen jonon k jonon jäsentä b:ksi (loput a:ksi)?
- $C(n,k) = \binom{n}{k}$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Rationaaliluvut

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

- Ääretön määrä esityksiä: $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$, $n \in \mathbb{Z}$
- Tiheä: jos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, on $\frac{a}{b} < \frac{ad + bc}{2bd} < \frac{c}{d}$
- Jos $a, b > 0$, on $Nb \cdot \frac{a}{b} = Na \geq N$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisua ei ole joukossa $\mathbb{R}$?

Reaalilukujen ominaisuuksia

Reaalilukujen aksiomatisointi

Peruskäsitteet: joukko $\mathbb{R}$, operaatiot $+$ ja $\cdot$, alkiot 0 ja $1 \in \mathbb{R}$.
Kunta-aksioomat:

1. Kaikille reaaliluvuille a, b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
3. Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a:n *vastaluku* $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1}, joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
4. Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
5. kaikille reaaliluvuille a, b, ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a:n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2, olisi $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella $a \neq 0$ voi olla vain yksi käänteisluku.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
- Aksioomissa ei mainita, että kaikille $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 0 = 0$. Tämä on looginen seuraus aksioomista.