

# Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2024

- Onko yhtälöllä  $x^2 = 2$  ratkaisua reaalilukujen joukossa  $\mathbb{R}$ ?
- Onko yhtälöllä  $x^2 = -1$  ratkaisua reaalilukujen joukossa  $\mathbb{R}$ ?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi  $\sqrt{2}$  on olemassa joukossa  $\mathbb{R}$ ?
- Miksi yhtälön  $x^2 = -1$  ratkaisua ei ole joukossa  $\mathbb{R}$ ?

## Reaalilukujen aksiomatisointi

Peruskäsitteet: joukko  $\mathbb{R}$ , operaatiot  $+$  ja  $\cdot$ , alkiot  $0$  ja  $1 \in \mathbb{R}$ .

Kunta-aksiomat:

- 1 Kaikille reaaliluvuille  $a$ ,  $b$  ja  $c$  pätee  $a + (b + c) = (a + b) + c$  ja  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
- 2 Jokaiselle reaaliluvulle  $a$  pätee  $0 + a = a$  ja  $1 \cdot a = a$ .
- 3 Jokaista reaalilukua  $a$  kohti on olemassa  $a$ :n *vastaluku*  $-a$ , joka toteuttaa  $a + (-a) = 0$  ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua  $a$  kohti on olemassa käänteisluku  $a^{-1}$ , joka toteuttaa  $a \cdot a^{-1} = 1$ .
- 4 Kaikille reaaliluvuille  $a$  ja  $b$  pätee  $a + b = b + a$  ja  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- 5 kaikille reaaliluvuille  $a$ ,  $b$ , ja  $c$  pätee  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

## Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos  $b \neq 0$ ,  $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ .

## Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin  $a$ :n vastalukuja olisivat sekä  $a_1$  ja  $a_2$ , olisi  $a + a_1 = 0 = a + a_2$ , mistä voidaan päätellä, että  $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella  $a \neq 0$  voi olla vain yksi käänteisluku.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$ .
- Aksiomissa ei mainita, että kaikille  $a \in \mathbb{R}$   $a \cdot 0 = 0$ . Tämä on looginen seuraus aksiomista.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
- $\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$
- $\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$

## Järjestysaksiomat

On olemassa osajoukko  $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$ , joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 Jokaista reaalilukua  $a$  kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $a = 0$  tai  $-a \in \mathbb{R}_+$ .
- 2 Jos  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , niin  $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$ .

## Määritelmä

Suuremmuusrelaatio  $>$  määritellään seuraavasti:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+.$$

Relaatio  $\geq$  määritellään ehdolla

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Relaatiot  $<$  ja  $\leq$  määritellään analogisesti.

## Lause

Jos  $a > b$  ja  $b > c$ , niin  $a > c$ .

Todistus:

Ensinnäkin  $a > b$  tarkoittaa että  $a - b \in \mathbb{R}_+$  ja vastaavasti  $b > c$  tarkoittaa että  $b - c \in \mathbb{R}_+$ .

Järjestysaksioomien mukaan tällöin pätee

$$a - c = \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{b - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+,$$

mikä puolestaan tarkoittaa että  $a > c$ .

## Tehtävä

Mieti miksi pitää olla  $1 \in \mathbb{R}_+$  ja miksi  $(-1)a = -a$ .

## Lause

Jos  $a < c$  ja  $b < d$ , niin  $a + b < c + d$ .

Todistus.  $a < c$  ja  $b < d$  tarkoittavat  $c - a \in \mathbb{R}_+$  ja  $d - b \in \mathbb{R}_+$ .

Tällöin  $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$ , siis

$$a + b < c + d$$

## Lause

Jos  $0 < a < c$  ja  $0 < b < d$ , niin  $ab < cd$

Todistus:  $a < c$  ja  $b < d$  tarkoittavat sitä, että  $c - a \in \mathbb{R}_+$  ja  $d - b \in \mathbb{R}_+$ . Lisäksi aiemmin havaitun mukaan ehdoista  $0 < a$  ja  $a < c$  seuraa  $0 < c$ , siis  $c \in \mathbb{R}_+$ . Tällöin

$$cd - ab = cd - cb + cb - ab = c(d - b) + b(c - a) \in \mathbb{R}_+,$$

siis  $ab < cd$ .

## Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

## Huomautus

- $|x| \geq 0$ .
- $|xy| = |x| |y|$ .
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos  $-|y| \leq x \leq |y|$ , niin  $|x| \leq |y|$ .
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$ .

## Kolmioepäyhtälö

Epäyhtälöä  $|x + y| \leq |x| + |y|$  kutsutaan *kolmioepäyhtälöksi*.

## Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys  $d(x, y)$  määritellään seuraavasti:  $d(x, y) = |x - y|$

## Lause

Kaikille reaaliluvuille  $x$ ,  $y$  ja  $z$  pätee

- $d(x, y) \geq 0$  ja  $d(x, y) = 0$  vain jos  $x = y$ .
- $d(x, y) = d(y, x)$ .
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

## Lause

Sekä  $d(a + b, c + d)$  että  $d(ab, cd)$  saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan  $d(a, c)$  ja  $d(b, d)$  valitaan riittävän pieniksi.

- $d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$
- $d(ab, cd) = |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a| |b - d| + |a - c| |d| = |a| d(b, d) + |d| d(a, c).$

## Esimerkki

$$d(x^2, 9) = |x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)| = |x + 3| d(x, 3).$$

Jos  $x$  on niin lähellä lukua 3 että  $d(x, 3) < 1$ , on silloin  $2 < x < 4$  ja siksi  $|x + 3| < 4 + 3 = 7$ . Tällöin siis  $d(x^2, 9) < 7d(x, 3)$ .

## Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksiomat. Ratkaisua yhtälöön  $x^2 = 2$  ei kuitenkaan ole joukossa  $\mathbb{Q}$ .

## Määritelmä

Olkoon  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ .

- Luku  $M$  on joukon  $A$  *yläraja*, mikäli  $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq M)$
- Luku  $S = \sup A$  on joukon  $A$  *pienin yläraja*, *supremum*, jos  $S$  on yläraja ja

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)(a > S - \epsilon)$$

## Täydellisyysaksioma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa *pienin yläraja*.

## Esimerkki

Rationaalilukujen jono  $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$  on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku  $\pi$  joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja. Tämä on se reaaliluku, jota edellämainittu rationaalilukujen jono lähestyy.

## Huomautus

Jos valitaan mikä hyvänsä jono rationaalilukuja  $r_1 < r_2 < r_3 \dots < M$ , niin täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa sellainen reaaliluku  $\alpha$ , jota jono  $r_1, r_2, r_3, \dots$  lähestyy. Pienimmän ylärajan ominaisuudesta nimittäin seuraa, että  $\forall \epsilon > 0$   $\alpha - \epsilon$  ei ole ko. jonon yläraja, ja siis on olemassa sellainen  $r_n$  että  $\alpha - \epsilon < r_n < \alpha$ .

## Ei ääretöntä alkiota

$$M + 1 > M + 0 = M$$

## Määritelmä

Luku  $\epsilon > 0$  on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos  $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

## Ei infinitesimaaleja

Jos olisi  $(\forall n) n\epsilon < M$ , on joukko  $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$  ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja  $S$ . Näin ollen  $S - \epsilon$  ei ole joukon yläraja ja siksi  $(\exists m) m\epsilon > S - \epsilon$ , mistä seuraa  $(m + 1)\epsilon > S$ . Mutta  $(m + 1)\epsilon \in A$ , joten  $S$  ei olekaan joukon yläraja.

## Seurauksia

- Jokaisella välillä  $(a, b)$  on rationaaliluku  $r$  ja irrationaaliluku  $\alpha$
- Desimaaliesitys
- Rationaaliset approksimaatiot.

## Määritelmä

Funktiota  $f : A \rightarrow B$  sanotaan reaalifunktioksi, jos  $f$  on määritelty jossakin joukossa  $A \subseteq \mathbb{R}$  ja saa arvonsa jossakin joukossa  $B \subseteq \mathbb{R}$ . Jos  $f(x) = y$ , sanotaan, että  $x$  on  $y$ :n *alkukuva*, ja  $y$  on  $x$ :n *kuva*.

## Määritelmä

Olkoon  $f : A \rightarrow B$  (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .
- Funktio on *surjektiivinen*, jos  $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$ .
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

## Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran. Surjektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.