Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Määritelmä

Funktiota $f : A \to B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y:n *alkukuva*, ja y on x:n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \to B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran. Surjektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.

Reaalifunktiot

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) < f(x_2)).$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2)).$
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Lause

Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Määritelmä

Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \to C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*.

Esimerkki

Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Määritelmä

Olkoon $f : A \to B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \to A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f:n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Lause

- Funktiolla $f : A \to B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \to A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.
- Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ei ole injektio, eikä surjektio. Näin ollen sillä ei ole käänteisfunktiota.

Reaalifunktiot

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkkejä

- $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ esittää polynomifunktiota
- $r(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ esittää rationaalifunktiota, joka on määritelty kun $x \neq 1$.

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0?

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

Tästä seuraa, että $a^0 = 1$.

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n}, kun $n \in \mathbb{N}$?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^r, kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?
Pitäisi olla
$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Määritelmä

Olkoon $b > 0$. Luvun b n:s juuri on positiivinen reaaliluku β, joka toteuttaa yhtälön $\beta^n = b$. Tätä merkitään symbolilla $\beta = \sqrt[n]{b}$.
Edellämainitun perusteella pitää määritellä

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

(Mieti mistä viimeisin yhtäsuuruus johtuu)

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \ldots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ ja määritellä $a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots\}$

Eksponenttifunktio

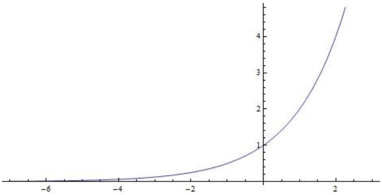
Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$

Reaalifunktiot

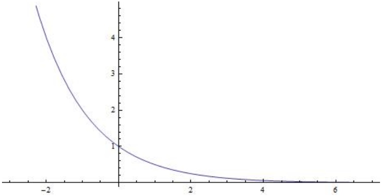
Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f:n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f:n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f:n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta
- Molemmissa tapauksissa bijektio.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

$y = 2^x$



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Logaritmi

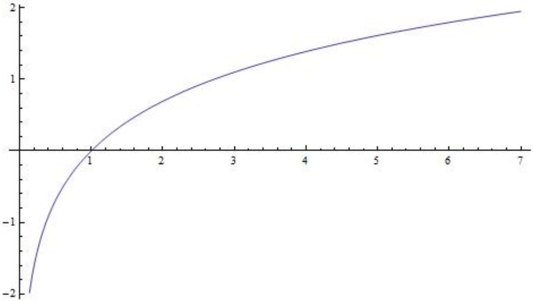
Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifuntio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$ ja siis
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

$$y = \ln x = \log_e x, \; e = 2,718281828459045235 36\ldots$$



Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinikään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9\log_2(10) = 29.897\ldots.$$

Trigonometriset funktiot

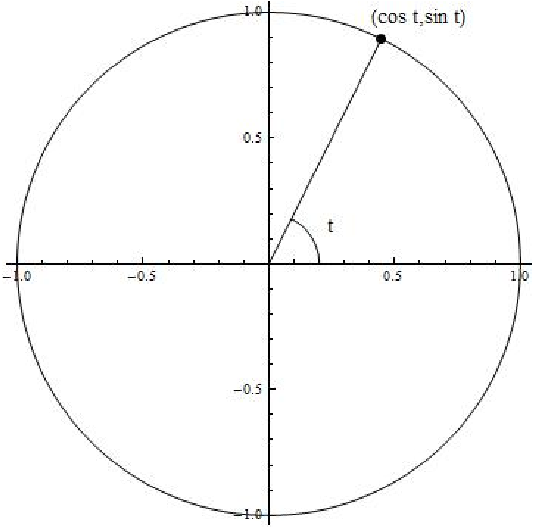
"Määritelmä"

Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma x (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi y (radiaaneissa) seuraavasti: $y = \frac{\pi}{180}x$. Suoran kulman suuruus on siis $\frac{\pi}{2}$, oikokulman π ja täyden ympyrän 2π.

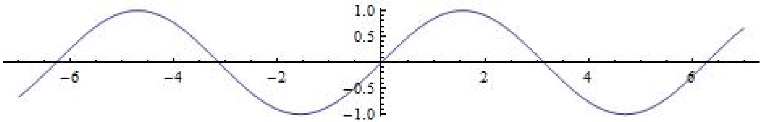
"Määritelmä"

Kulman, joka kiertyy positiiviselta x-akselilta myötäpäivään *kehäpiste* on origokeskisen yksikköympyrän ja kulman vasemman kyljen leikkauspiste. Tämän kulman *sini* on kehäpisteen y-koordinaatti ja *kosini* x-koordinaatti.

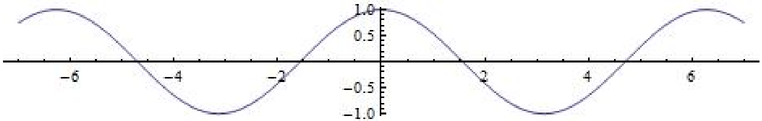
Trigonometriset funktiot



Trigonometriset funktiot



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$

$$\sin x = \cos(x - \tfrac{\pi}{2})$$

Trigonometriset funktiot

Jaksollisuus

$\sin x = \sin(x + 2\pi n) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$

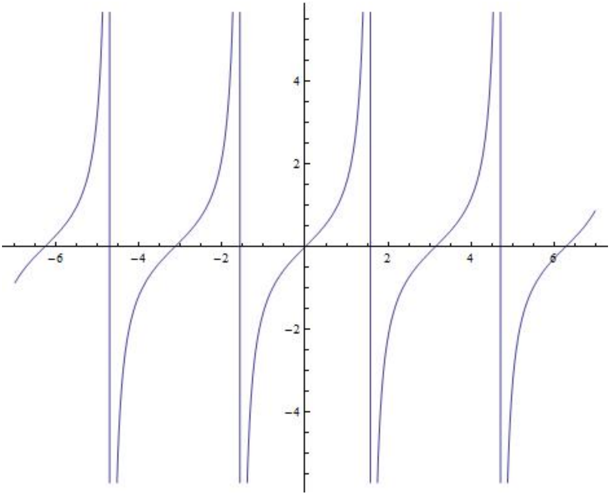
Nollakohdat

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Trigonometriset kaavat

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, jne.

Trigonometriset funktiot



$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$