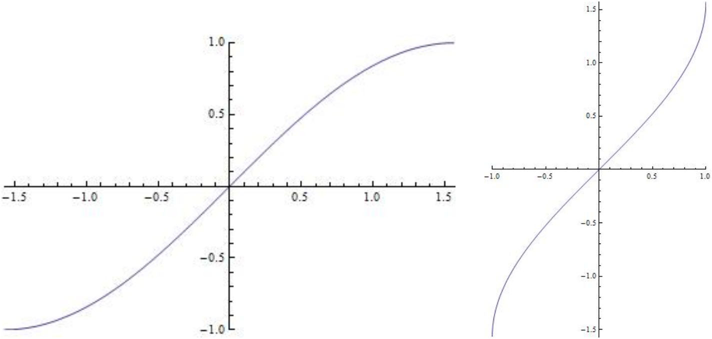
Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \qquad \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$



Käänteisfunktiot

- Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkussini*, merkitään arcsin tai $\sin^{-1}$.
- Funktion $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkuskosini*, merkitään arccos tai $\cos^{-1}$.
- Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkustangentti*, merkitään arctan tai $\tan^{-1}$.

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x+\pi) = -\cos x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\cdot 1 \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|, \end{aligned}$$

siis $d(\sin x, \sin y) \leq d(x,y)$. Samoin $d(\cos x, \cos y) \leq d(x,y)$.

Algebralliset funktiot

Kahden muuttujan polynomiyhtälö $P(x,y)=0$ saattaa määritellä funktion $f:A\to B$, $y=f(x)$ kunhan joukot A ja B valitaan sopivasti. Tällaisia funktioita sanotaan *algebrallisiksi*. Tällöin siis x on alkukuva ja y on kuva.

Esimerkki

Polynomiyhtälö $x^2+y^2-1=0$ määrittelee yksikköympyrän. Mikäli valitaan $A=[-1,1]$ ja $B=[0,\infty)$, saadaan aikaan funktio $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Esimerkki

Polynomiyhtälö $x^2-y^2=0$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x-y)(x+y)=0$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x=y$ tai $x=-y$. Jos nyt valitaan $A=\mathbb{R}$ ja $B=[0,\infty)$, saadaan funktio $f(x)=\sqrt{x^2}$.

Määrittely paloittain

Esimerkki

Määritellään

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{jos } x < 0 \\ x, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$

Esimerkki

Määritellään *signum*-funktio ehdoilla

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0 \\ 0 & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Alkeisfunktiot

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku
- Kerto- ja jakolasku

Määritelmä

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Esitysmuotoja (yksikköympyrä)

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Itseisarvo

- Eksplisiittimuoto: $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$
- Implisiittimuoto: $x^2 - y^2 = 0$, $y \geq 0$.
- Parametrimuoto: $\{(t, \operatorname{sgn}(t)t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Esimerkki

Toisen asteen polynomiyhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$(a \neq 0)$ ratkaiseminen

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.
- Jos $y = 0$, on $z = x + yi = x \in \mathbb{R}$.

Huomautus

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x, y) = x + yi$ on bijektio.

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$
- Kompleksiluvut ns. toteuttavat kunta-aksioomat

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *reaaliosa* määritellään $\mathrm{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* $\mathrm{Im}(z) = y$

Liittoluku

Kompleksiluvun $z = x + yi$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti on $\overline{z} = x - yi$.

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$

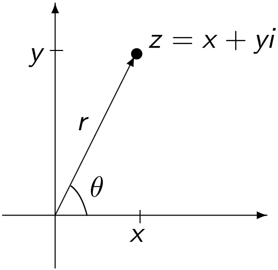
Lause

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{ja} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Kompleksilukujen osamäärä

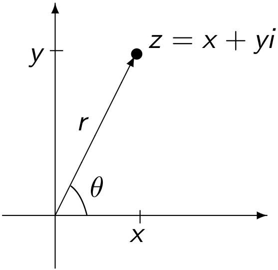
$$\begin{aligned}\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} &= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_2 y_1 i - x_1 y_2 i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.\end{aligned}$$

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$



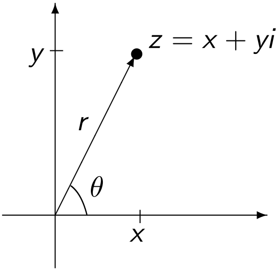
Kaksi esitystä

- xy-esitys (tai Re-Im) -esitys: reaaliosa x ja imaginaariosa y
- Polaari- eli napakoordinaattiesitys: Etäisyys origosta r ja vaihekulma θ.



Itseisarvo ja vaihekulma

- $r = |z| \overset{\text{Määr.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Jos $x = 0$, valitaan $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}, & \text{kun } y > 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & \text{kun } y < 0. \end{cases}$
- Vaihekulma voidaan valita $\theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & \text{jos } x > 0. \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$



Polaariesitys I ($r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

joten

$$z = x + yi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$