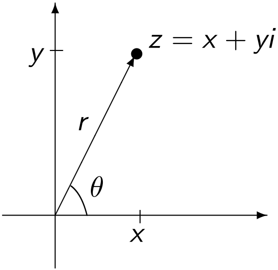
Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

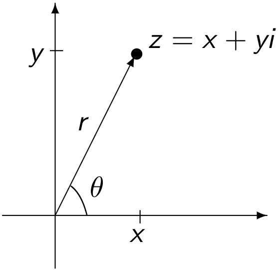
2024

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$



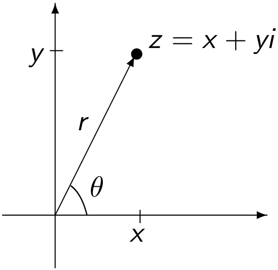
Kaksi esitystä

- xy-esitys (tai Re-Im) -esitys: reaaliosa x ja imaginaariosa y
- Polaari- eli napakoordinaattiesitys: Etäisyys origosta r ja vaihekulma θ.



Itseisarvo ja vaihekulma

- $r = |z| \overset{\text{Määr.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Jos $x = 0$, valitaan $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}, & \text{kun } y > 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & \text{kun } y < 0. \end{cases}$
- Vaihekulma voidaan valita $\theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & \text{jos } x > 0. \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$



Polaariesitys I ($r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

joten

$$z = x + yi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Leonhard Euler (1707–1783)

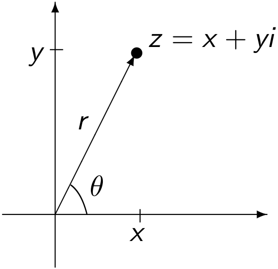
Eulerin kaava

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

($e = 2,718281828459045\ldots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$
- $e^{i\cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i\sin(n\pi) = (-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}$
- $e^{2\pi in} = (-1)^{2n} = 1,\ n \in \mathbb{Z}.$



Polaariesitys II ($e^{i\theta} = cos\theta + i\sin\theta$)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

joten

$$z = x + yi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$

Huomautus

Jos $\theta \in \mathbb{R}$, on

$$\left|e^{i\theta}\right| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

ja siis polaariesityksessä $z = re^{i\theta}$ on $r = |z|$.

Huomautus

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \cos(\theta + 2\pi n) + i\sin(\theta + 2\pi n) = e^{i(\theta+2\pi n)}$$

Seuraus

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi n)},$$

siis polaariesitys ei ole koskaan yksikäsitteinen, vaan vaihekulmaan θ voidaan aina lisätä mikä hyvänsä täyden ympyrän monikerta.

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$

Lause

Jos θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$, on $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Kertolaskun tulkinta

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, missä $r_1 = |z_1|$ ja $r_2 = |z_2|$. Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

"itseisarvot kerrotaan ja vaihekulmat lisätään"

de Moivren Kaava

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Eulerin kaava $\Rightarrow$ Trigonometrian kaavoja

- Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $(e^{ix})^2 = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$
- $(e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i2 \cos x \sin x$

Vertaamalla reaali- ja imaginaariosia saadaan
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ja $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$

Kompleksinen eksponenttifunktio

Kompleksiluvulle $z = x + iy$ määritellään Eulerin kaavaa noudattaen

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Huomautus

Jos $n \in \mathbb{Z}$, on

$$e^{z+2\pi in} = e^z e^{2\pi in} = e^z,$$

eikä eksponenttifunktio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ siten ole injektio.

Huomautuksia

- Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ arvojoukko on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, eikä f siis ole myöskään surjektio.
- Käänteisrelaatio $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ei ole funktio: Nollalla ei ole yhtään kuvaa ja kaikilla muilla $z \in \mathbb{C}$ on äärettömän monta kuvaa.
- Funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ on surjektio mutta ei injektio. Määritellään kompleksinen logaritmi tämän funktion käänteisrelaationa.
- Analogia: Jos $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$ ja $x = re^\theta$, niin $\ln x = \ln(re^\theta) = \ln r + \ln e^\theta = \ln r + \theta$.

Kompleksinen logaritmi

Kompleksiluvun $z \neq 0$ logaritmi saadaan polaariesityksen avulla: Olkoon z:n polaariesitys $z = |z|\, e^{i\theta} = |z|\, e^{i(\theta+2\pi n)}$. Tällöin kompleksinen logaritmi määritellään

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Huomautus

$\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tarkoittaa kompleksista e-kantaista logaritmia, $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tavallista reaaliluvuilla määriteltyä e-kantaista logaritmia.

Kompleksinen logaritmi

Määritelmä

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Määritelmän ongelmia

- Määritelmän oikea puoli on ääretön joukko kompleksilukuja. Joskus käytetään joukkosulkeita.
- Oikea määritelmä: Kaikille $n \in \mathbb{Z}$ ns. relaationuoli

$$z \xrightarrow{\operatorname{Log}} \ln |z| + i(\theta + 2\pi n).$$

- Kurssille valittu määritelmä tasapainotettu perinteen ja johdonmukaisuuden välillä.

Kompleksinen logaritmi

Tulkintamahdollisuuksia

- Käsitetään logaritmi funktiona $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to 2^{\mathbb{C}}$. Joukko $\{z\}$ ja luku z samaistetaan. Voidaan käyttää tällä kurssilla.
- Logaritmin maalijoukon laajentaminen, jolloin saadaan funktio. Edellyttää kompleksitason "monistamista" äärettömän moneksi kopioksi ja niiden sopivaa yhteenliittämistä (ns. Riemannin pinnat). Ei käsitellä tällä kurssilla.
- Vaihekulman rajoittaminen yksikäsitteisyyden saavuttamiseksi (ns. päähaara). Voidaan käyttää tällä kurssilla.

Esimerkki

- $\mathrm{Log}(-2)$?
- Luvun -2 polaariesitys ?
- $|-2| = 2$, vaihekulma π
- $-2 = 2 \cdot e^{i\pi} = 2e^{i(\pi+2\pi n)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\mathrm{Log}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n)$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- Log i ?
- Luvun i polaariesitys ?
- $|i| = 1$, vaihekulma $\frac{\pi}{2}$
- $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{Log} i = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Kompleksinen logaritmi

Logaritmin päähaara

Logaritmin *päähaara* $\overline{\text{Log}}$ on logaritmirelaation

$$z \xrightarrow{\text{Log}} \ln|z| + i(\theta + n \cdot 2\pi)$$

se kuva

$$\overline{\text{Log}} z = \ln|z| + i(\theta + 2n_1\pi),$$

jolle pätee $\theta + 2n_1\pi \in (-\pi, \pi]$.

Esimerkki

$\text{Log}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n),$
$\overline{\text{Log}}(-2) = \ln 2 + i\pi$

Kompleksinen potenssiinkorotus

Analogia reaaliluvuilla

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$$

Määritelmä

Olkoon $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $b \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$a^b = e^{b \operatorname{Log} a}$$

Huomautus

- Koska $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ on relaatio, on myös kompleksinen potenssi relaatio, ts. a^b:llä voi olla useita arvoja.
- Myös yksikäsitteinen arvo a^b on mahdollista, sillä eksponenttifunktio voi yhdistää monia arvoja yhdeksi.

Esimerkki

- i^i ?
- $i^i = e^{\operatorname{Log} i^i} = e^{i \operatorname{Log} i}$
- $\operatorname{Log} i = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $i \operatorname{Log} i = -(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Kompleksinen potenssiinkorotus

Esimerkki

- 3^2 ?
- $3^2 = e^{\operatorname{Log} 3^2} = e^{2 \operatorname{Log} 3}$
- $\operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} 3e^{2\pi i n} = \ln 3 + 2\pi i n$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $2 \operatorname{Log} 3 = 2 \ln 3 + 4\pi i n$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $3^2 = e^{2 \ln 3 + 4\pi i n} = e^{2 \ln 3} e^{4\pi i n} = e^{2 \ln 3} = e^{\ln 9} = 9$

Kompleksinen potenssiinkorotus

Esimerkki

- $8^{\frac{1}{3}}$?
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\operatorname{Log} 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3}\operatorname{Log} 8}$
- $\operatorname{Log} 8 = \operatorname{Log} 8e^{2\pi i n} = \ln 8 + 2\pi i n$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{3}\operatorname{Log} 8 = \frac{1}{3}\ln 8 + \frac{2\pi i n}{3}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln 8 + \frac{2\pi i n}{3}} = e^{\ln 8^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{2\pi i n}{3}} = 2e^{\frac{2\pi i n}{3}}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $8^{\frac{1}{3}} = \{2, 2e^{\frac{2\pi i n}{3}}, 2e^{\frac{4\pi i n}{3}}\}$

Lause (Potenssin arvojen määrät)

- Jos $b \in \mathbb{N}$, kompleksinen potenssi a^b on yksikäsitteinen ja yhtyy kertolaskun avulla saatuun määritelmään:

$$a^b = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ kpl}}.$$

  Yksikäsitteisyys on myös voimassa kaikille $b \in \mathbb{Z}$.

- Jos $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on supistetussa muodossa, on kompleksisella potenssilla a^b q eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{q}}$, $n \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.
- Jos $b \notin \mathbb{Q}$, on kompleksisella potenssilla a^b äärettömän monta eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{b \cdot n \cdot 2\pi i}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Kompleksinen potenssiinkorotus

Määritelmä

Potenssin a^b pääarvo (tai päähaaran arvo) on $e^{b\overline{\mathrm{Log}}a}$.

Määritelmä

n:nnet ykkösenjuuret ovat potenssin $1^{\frac{1}{n}}$ kaikki arvot

$$1^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} 1} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} e^{2\pi ik}} = e^{\frac{2\pi ik}{n}},$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Nämä ovat yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut.

Kompleksinen potenssiinkorotus

Ykkösenjuuret

Koska $e^{2\pi i} = 1$, on

$$1^{\frac{1}{n}} = \{e^{0\cdot\frac{2\pi i}{n}} = 1, e^{1\cdot\frac{2\pi i}{n}}, e^{2\cdot\frac{2\pi i}{n}}, \ldots, e^{(n-1)\cdot\frac{2\pi i}{n}}\}.$$

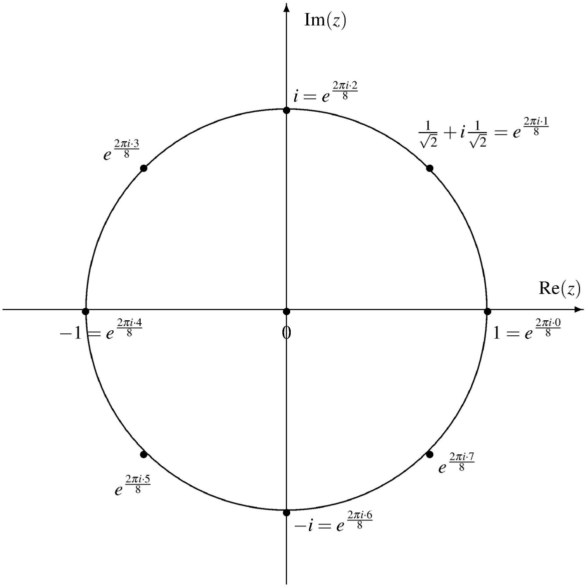
Toisin ilmaistuna:

n:nsien ykkösenjuurten itseisarvo on 1 ja vaihekulmat ovat

$$0\cdot\frac{2\pi}{n}, 1\cdot\frac{2\pi}{n}, 2\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

$\frac{2\pi}{n}$ on n:s osa täydestä ympyrästä.

Kompleksinen potenssiinkorotus: $z^8 = 1$ ratkaisut



Kompleksilukujen trigonometriset funktiot

Eulerin kaava

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Yhteenlasku ja vähennyslasku tuottaa seuraavat määritelmät:

Sini ja kosini

- $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
- $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- Näin määritellen Eulerin kaava pätee myös kompleksiluvuille

Kompleksiluvut

Lukujoukon laajennus

- Yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua $\mathbb{R}$:ssä, mutta $\mathbb{C}$:ssä kaksi ratkaisua $\pm i$.
- Esimerkki: Yhtälöllä $x^2 - 2x + 5 = 0$ on kaksi kompleksista ratkaisua $1 \pm 2i$.
- Entä kaikki muut polynomiyhtälöt $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$?

Määritelmä

Muuttujan z kompleksikertoimisten polynomien joukosta käytetään merkintää $\mathbb{C}[z]$. Vastaavat merkinnät reaali- ja kokonaislukukertoimisista polynomeista ovat $\mathbb{R}[z]$ ja $\mathbb{Z}[x]$.

Algebran peruslause

Olkoon $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 \in \mathbb{C}[z]$. Jos $P(z)$ ei ole vakiopolynomi $c_0 \neq 0$, on polynomiyhtälöllä

$$P(z) = 0$$

ratkaisu joukossa $\mathbb{C}$.

Huomautus

Algebran peruslauseesta ei kuitenkaan seuraa että polynomin nollakohta voitaisiin löytää helposti polynomin kertoimista, kuten esim. 2. asteen tapauksessa.

Niels Henrik Abel 1824:

Astetta ≥ 5 olevien polynomien nollakohtia ei yleisesti voida esittää polynomin kertoimista rakennettuna juuri- ja rationaalifunktioiden yhdistelmänä.
Toisin sanoen: Ei ole olemassa juuri- ja rationaalifunktioihin perustuvaa "ratkaisukaavaa" jos polynomin aste on ≥ 5.