Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 2, 30.1.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Veikkauskupongin jokaisella rivillä on kolme vaihtoehtoa: 1, X ja 2. Tomi täyttää kuponkia heittämällä kaksi kertaa kolikkoa, jolloin joka heitolla tulee joko kruuna (merkitään 0) tai klaava (merkitään 1), kumpikin todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Mikäli heittotulos on 00, merkitsee Tomi kuponkiin 1, heittotuloksella 01 Tomi merkitsee X:n ja heittotuloksella 10 Tomi merkitsee 2:n. Jos kolikonheitto tuottaa tuloksen 11, Tomi ei kirjaa mitään, vaan heittää uudelleen. Saako Tomi tällä tavalla aikaan tasaisen todennäköisyysjakauman, jossa kukin tulos 1, X, tai 2 tulee merkityksi todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$? Perustele vastauksesi.

   Mallivastaus: Kyse on ehdollisista todennäköisyyksistä: Merkitään $B = \{00, 01, 10\}$, jolloin $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$. Tällöin esim. tuloksen 00 ehdollinen todennäköisyys on

   $$\mathbb{P}(00 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\{00\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

   Samoin voidaan todeta, että tuloksien 01 ja 10 ehdollinen todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Näin ollen Tomin menetelmä toimii: Kukin tuloksista saadaan todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

2. Linda menee illalla elokuviin todennäköisyydellä 20%, diskoon todennäköisyydellä 70%, ja taidenäyttelyyn todennäköisyydellä 10%. Elokuvaan Linda on tyytyväinen 40% todennäköisyydellä, diskoon 60% todennäköisyydellä, ja taidenäyttelyyn 80% todennäköisyydellä.

   Laske todennäköisyys sille, että Linda on illanviettoonsa tyytyväinen. Ohje: Käytä kokonaistodennäköisyyden kaavaa.

   Mallivastaus: Käytetään merkintöjä E, D ja N elokuvista, diskosta ja (taide)näyttelystä, sekä merkintää T siitä, että Linda on tyytyväinen. Tällöin

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(T \mid E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(T \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T \mid N)\mathbb{P}(N) \\ &= 0,4 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,1 = 0,58 \end{aligned}$$

3. Linda oli tyytyväinen illanviettoonsa. Millä todennäköisyydellä hän kävi taidenäyttelyssä? Entä millä todennäköisyydellä hän kävi elokuvissa? Ohje: Käytä Bayesin kaavaa ja edellisen tehtävän tulosta.

   Mallivastaus:

   $$\mathbb{P}(N \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid N) \cdot \mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,58} \approx 0,137931$$

   (kävi näyttelyssä) ja

   $$\mathbb{P}(E \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,58} \approx 0,137931$$

   (kävi elokuvissa).

4. Nopanheitossa saadaan 6 todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$ ja muu silmäluku $\frac{5}{6}$. Millä todennäköisyydellä saadaan 6 vasta kuudennella heitolla?

   Mallivastaus: Kysytty todennäköisyys on

   $$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} \approx 0,067$$

5. Olkoot todennäköisyydet silmäluvulle 6 ja muille kuten edellisessä tehtävässä. Mikä on todennäköisyys saada tasan 4 kuutosta, kun noppaa heitetään 24 kertaa?

   Mallivastaus: Kysytty todennäköisyys on

$$\binom{24}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{20} \approx 0,2139$$

6. Olkoot todennäköisyydet silmäluvulle 6 ja muille kuten edellisessä tehtävässä. Noppaa heitetään, kunnes on saatu tasan 4 kuutosta. Mikä on todennäköisyys sille, että tähän tarvitaan 24 heittoa?

   Mallivastaus: Luentoesimerkin mukaan kysytty todennäköisyys on sama kuin se, että 23 ensimmäistä heittoa tuottaa tasan 3 kuutosta ja 24. heitto tuottaa kuutosen. Tämä on

$$\binom{23}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{23-3} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0356$$

7. Olkoon $n > 0$. Määritellään funktio $f(x)$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } x < 0 \\ \frac{1}{n} & \text{jos } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{jos } x > n. \end{cases}$$

   Piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja ja totea että se on todennäköisyysjakauma. Laske tätä todennäköisyysjakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi integraalilausekkeen avulla.

   Mallivastaus: Koska $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^n \frac{1}{n}\,dx = 1,$$

   kyseessä on todennäköisyysjakauma. Odotusarvo saadaan integraalilla

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^n x\frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n} \Big/_0^n \frac{1}{2}x^2 = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}.$$

   Varianssia varten lasketaan

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^n x^2\frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n} \Big/_0^n \frac{1}{3}x^3 = \frac{n^2}{3n} = \frac{n^3}{3},$$

   josta

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n^2}{3} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{12}$$

8. Erään asuinalueen äänestäjistä 60% kannattaa puoluetta A. Mikä on todennäköisyys sille, että 10:stä kyselyyn valitusta puoluetta A kannattaa 5, 6 tai 7? Ohje: Binomijakauma.

   Mallivastaus: Kysytty todennäköisyys on

$$\binom{10}{5}0.6^5 \cdot 0.4^5 + \binom{10}{6}0.6^6 \cdot 0.4^4 + \binom{10}{7}0.6^7 \cdot 0.4^3 \approx 0.666$$

9. Pankki kirjaa keskimäärin 35 yritystä maksukyvyttömäksi joka vuosi. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä pankki kirjaa jonkin kuukauden aikana vähintään 4 yritystä maksukyvyttömäksi. Ohje: Oletetaan vuoden jakautuvan tasan 12 kuukauteen. Kuinka monta yritystä tällöin pankki kirjaa maksukyvyttömäksi keskimäärin per kuukausi?

   Mallivastaus: Pankki kirjaa joka kuukausi odotusarvoisesti $\lambda = \frac{35}{12}$ maksukyvyttömäksi. Lasketaan komplemetaarinen todennäköisyys sille, että pankki kirjaa vähemmän kuin 4 yritystä maksukyvyttömäksi:

$$\mathbb{P}(X < 4) = e^{-\lambda}(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}) = 0.665895\ldots,$$

   josta

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) = 0.334105\ldots$$