Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 3, 6.2.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Kaupungissa A julkinen rakennus evakuoidaan jonkin uhan (tulipalo, pommiuhkaus, etc.) sattuessa keskimäärin 30 kertaa vuodessa. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä yhden kuukauden aikana joudutaan julkinen rakennus evakuiomaan enemmän kuin kolme kertaa tietyn kuukauden aikana.

2. Kaupungissa B on keskimäärin 120 sadepäivää vuodessa. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä tietyn kuukauden aikana on vähemmän kuin 5 sadepäivää. Esitä myös näkemyksesi siitä, onko Poissonin jakauma käyttökelpoinen tehtävässä esitetyn kysymyksen arviointiin.

3. Apteekin palvelutiskille kutsutaan asiakas keskimäärin joka 5. minuutti, ja kutsujen väliajat noudattavat eksponenttijakaumaa.

   a) Määritä parametri v tiheysfunktiolle $f(t) = ve^{-vt}$. Ajan yksikkönä käytetään minuuttia.

   b) Mikä on todennäköisyys sille, että juuri kutsutun asiakkaan jäkeen seuraava asiakas joutuu odottamaan ainakin 3 minuuttia?

   c) Jos edellinen asiakas kutsuttiin 3 minuuttia sitten, mikä on todennäköisyys sille, että seuraava joutuu odottamaan vielä ainakin kolme minuuttia?

4. Yritys valmistaa Led-lamppuja, joiden kestoikä on likimain normaalisti jakautunut, odotusarvon ollessa $\mu = 25000$ ja keskihajonnan $\sigma = 3000$ (aikayksikkönä tunti).

   a) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää yli 35000 tuntia?

   b) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää alle 15000 tuntia?

   c) Mikä on kestoaika, jonka ylittää vain 2% lampuista?

   Ohje c)-kohtaa varten: Matlabissa standardoidun normaalijakauman kertymäfuntion käänteisfunktio saadaan muodossa `norminv(p)`.

5. Oletetaan tunnetuksi, että riippumattomille satunnaismuuttujille X ja Y pätee $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Miten tästä seuraa, että riippumattomille satunnaismuuttujille $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$?

6. Olkoon X normaalijakautuman $N(\mu, \sigma^2)$ mukainen satunnaismuuttuja. Määritä todennäköisyydet $\mathbb{P}(|X-\mu| > \sigma)$, $\mathbb{P}(|X-\mu| > 3\sigma)$, ja $\mathbb{P}(|X-\mu| > 5\sigma)$.

   Ohje: $\mathbb{P}(|X-\mu| \leq a) = \mathbb{P}(-a+\mu \leq X < a+\mu)$.

7. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan **tasan** 167 kertaa silmäluku 6. Arvioi tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä olettaen että kaikki silmäluvut esiintyvät yhtä todennäköisesti.

8. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan **vähintään** 200 kertaa silmäluku 6. Arvioi tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä olettaen että kaikki silmäluvut esiintyvät yhtä todennäköisesti.

   Ohje: Mieti aluksi onko todennäköisyyttä helpompi arvioida binomijakauman vai keskeisen raja-arvolauseen avulla.

9. Hyllyissä on tilaa kirjoille yhteensä 300 m. Yhden kirjan paksuus on keskimäärin $\mu = 3$ cm ja paksuuden keskihajonta $\sigma = 0,8$ cm. Arvioi millä todennäköisyydellä 9000 kirjaa ei mahdu hyllyihin.

   Ohje: Jos X_i on kirjan i paksuus, on yhteispaksuus $X_1 + \ldots + X_{9000}$. Voit käyttää keskeistä raja-arvolausetta.