Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko Ω jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq \Omega$. Sanotaan, että A *tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Esimerkki

Nopanheitossa $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, parillinen silmäluku $A = \{2, 4, 6\}$. Tapaus A tapahtuu, jos esim. saadaan nopanheiton tuloksena 2

Esimerkki

Kahden nopan heitossa $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$, silmälukujen summa yli 9: $A = \{(i, j) \in S \mid i + j > 9\}$

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapauksen A todennäköisyydestä käytetään merkintää $\mathbb{P}(A)$.

Klassinen todennäköisyys

Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, on

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Esimerkki

Parillinen silmäluku yhden nopan heitossa $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Summa yli 9 kahden nopan heitossa: $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Geometrinen todennäköisyys

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

missä $\mu(X)$ on joukon X *geometrinen mitta*. Esimerkiksi $\mu([a,b]) = b - a$.

Esimerkki

Metrin mittainen lanka leikataan sokkona kahtia. Millä todennäköisyydellä toinen osista on korkeintaan 20 cm pituinen?

Esimerkki

Linja-auto lähtee pysäkiltä 20 minuutin välein. Millä todennäköisyydellä pysäkille satunnaiseen aikaan saapunut joutuu odottamaan korkeintaan 5 minuuttia linja-auton lähtöä?

Empiirinen todennäköisyys

Koe toistetaan N kertaa. Jos alkeistapaus s_i tapahtuu f_i kertaa (frekvenssi), sanotaan että alkeistapauksen s_i suhteellinen frekvenssi on $\frac{f_i}{N}$ ja empiirinen todennäköisyys määritellään suhteellisena frekvenssinä

$$\mathbb{P}(s_i) = \frac{f_i}{N}.$$

Esimerkki: Suomessa syntyneet lapset

Vuodet	Poikia	Tyttöjä	Poikien osuus
2012	30308	29185	50,94380852
2012–13	60166	57461	51,14982104
2012–14	89438	85421	51,14863976
2012–15	117907	112424	51,19024361
2012–16	144719	138426	51,11126808
2012–17	170393	163073	51,09756317
2012–18	195023	186020	51,18136273
2012–19	218209	208447	51,14401298
2012–20	241987	231132	51,14717439
2012–21	267274	255439	51,13207439
2012–22	290234	277430	51,12777981

Subjektiivinen todennäköisyys

Käyn huomenna kaupassa todennäköisyydellä $0,70$

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq \Omega$ ja $B \subseteq \Omega$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$

Esimerkki

$A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat. Sen sijaan A (parillinen silmäluku) ja $B_2 = \{5, 6\}$ (silmäluku vähintään 5 eivät ole toisiaan poissulkevia).

Todennäköisyyden aksioomat

- $\mathbb{P}(A) \geq 0.$ kaikille $A \subseteq \Omega$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
- $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$ jos tapaukset A_1, A_2, …, ovat toisensa poissulkevat.

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Esimerkki

Olkoot $A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{5, 6\}$ (vähintään 5). Tällöin

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Inkluusio-Ekskluusio -periaate

Unioni

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\
= \; & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\
- \; & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) \\
= \; & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) \\
- \; & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap D) \\
- \; & \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B \cap D) - \mathbb{P}(C \cap D) \\
+ \; & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap D) \\
+ \; & \mathbb{P}(A \cap C \cap D) + \mathbb{P}(B \cap C \cap D) \\
- \; & \mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D)
\end{aligned}$$

Järjestetty otanta

Otanta

- Palauttaen: n^k
- Palauttamatta $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n\cdot(n-1)!$$

$n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n alkiota voidaan järjestää jonoon: Ensimmäistä alkiota kohti on n mahdollisuutta, toista kohti $n-1$, jne.

Esimerkki

Luvut $\{1,2,3\}$ voidaan järjestää jonoon $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$:lla tavalla: 123, 132, 213, 231, 312 ja 321.

Järjestämätön otanta palauttamatta

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkiota n:stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkiota n:stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkiota voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k!\binom{n}{k}$. Siis

$$
\begin{aligned}
& k!\binom{n}{k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\
= \quad & \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \ldots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \\
\Rightarrow \quad & \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Järjestämätön otanta

Palauttamatta: Esimerkki

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{7! \cdot 33!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{7!} = 18643560$$

Järjestämätön otanta

Palauttaen?