Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Riippumattomuus

Tapaukset A ja B ovat riippumattomat, jos $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Tämä on ekvivalentti ehtojen $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ ja $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ kanssa (jos $\mathbb{P}(A) > 0$ ja $\mathbb{P}(B) > 0$).

Määritelmä (useampi tapaus)

Tapaukset $A_1, \ldots, A_n$ ovat riippumattomat, jos

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n)$$

Riippumattomuus

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua (paitsi jos nollatodennäköisyys molemmilla).
- Riippumattomuudesta ei kuitenkaan seuraa poissulkevuus.
- Jos A ja B ovat riippumattomat, niin ovat myös A ja $\overline{B}$, kuin myös $\overline{A}$ ja B, sekä $\overline{A}$ ja $\overline{B}$.

Esimerkkejä

Esimerkit 1.25–1.27

Esimerkki

Kolme metsästäjää 1, 2 ja 3 ampuu samaa jänistä toisistaan riippumatta. 1. osuu todennäköisyydellä $0,05$, 2. $0,08$ ja 3. $0,01$. Olkoon A_i tapaus, että jänikseen osuu i laukausta, $0 \leq i \leq 3$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_0) &= \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3}) = \mathbb{P}(\bar{1})\mathbb{P}(\bar{2})\mathbb{P}(\bar{3}) \\ &= 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,99 = 0,86526 \end{aligned}$$

(kukaan ei osu)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(1 \cap \bar{2} \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap 2 \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap 3) \\ &= 0,05 \cdot 0,92 \cdot 0,99 + 0,95 \cdot 0,08 \cdot 0,99 \\ &\quad +0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,01 = 0,12952 \end{aligned}$$

(yksi osuu)

Riippumattomuus

Toistokoe

Koe onnistuu todennäköisyydellä p ja sitä toistetaan riippumattomasti.

- Mikä on todennäköisyys, että $k-1$ ensimmäistä toistoa epäonnistuu ja k:s onnistuu?
- Mikä on todennäköisyys, että onnistuneiden kokeiden määrä on k, kun toistoja on n?
- Koetta toistetaan kunnes onnistumisia on n. Millä todennäköisyydellä toistoja tarvitaan k kpl?

Esimerkki

Esimerkki 1.29

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$. Tällöin sanotaan, että f on *diskreetti todennäköisyysjakauma* ja että satunnaismuuttuja X saa arvon x_i todennäköisyydellä $f(x_i)$.

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma.

Määritelmä

Jatkuvaan jakaumaan f liittyvä satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Vertaa:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

(tasainen diskreetti jakauma)

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \ldots + x_n \cdot f(x_n)$$

(yleinen diskreetti jakauma)

Esimerkki

Painottamaton noppa: X saa arvot $\{1,2,3,4,5,6\}$, jokaisen todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Painotettu noppa: X saa arvon 6 todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja arvot $\{1,2,3,4,5\}$ todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \ldots + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4,5.$$

Määritelmä

Jakaumafunktio eli kertymäfunktio on

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

(diskreetti jakauma) ja

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

(jatkuva jakauma)

Huomautus

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

$F(x)$ on kasvava funktio

Esimerkki

Kahden nopan heitossa

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0, \text{ kun } x < 2, \\
F(x) &= \frac{1}{36} \text{ kun } 2 \leq x < 3, \\
F(x) &= \frac{1}{12} \text{ kun } 3 \leq x < 4, \\
F(x) &= \frac{1}{6} \text{ kun } 4 \leq x < 5, \\
& \dots \\
F(x) &= \frac{35}{36} \text{ kun } 11 \leq x < 12, \\
F(x) &= 1 \text{ kun } x \geq 12
\end{aligned}
$$

Satunnaismuuttujien funktiot

Huomautus

Jos X on satunnaismuuttuja ja g koko reaaliakselilla määritelty funktio, niin $g(X)$ on myös satunnaismuuttuja ja

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_i} g(x_i) f(x_i)$$

(diskreetti jakauma) ja

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

(jatkuva jakauma)

Esimerkki

jos a, $b \in \mathbb{R}$ ja $g(X) = aX + b$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\,dx \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= a\mathbb{E}(X) + b
\end{aligned}$$

Varianssi

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X varianssi on (jatkuva jakauma)

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

ja (diskreetti jakauma)

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \sum_{x \in X} (x-\mu)^2 f(x)$$

Varianssin neliöjuurta $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ kutsutaan *keskihajonnaksi*. Varianssi kuvaa jakauman leveyttä.