

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 1, 27.3.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi

1. Esitä eksakti perustelu sille, että $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_1(x, y) = x$ on jatkuva missä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^2$ pisteessä (x_0, y_0) . Ohje 1: Luennolla on esitetty jopa vaativampi esimerkki. Ohje 2: pitää osoittaa, että $\|p_1(x, y) - p_1(x_0, y_0)\|$ saadaan mielivaltaisen pieneksi, kunhan $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ valitaan riittävän pieneksi.
2. Luennolla määriteltiin funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Hyväksytään luennolla mainittu sopimus, jonka mukaan termiä funktio voidaan käyttää, vaikka f olisikin määritelty vain jossain joukon $\mathbb{R}^2$ osajoukossa A . Perustele jollain luennolla esitetyllä tavalla, että funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan. Ohje: Selvitä ensin määrittelyjoukko (mainittu luennolla).
3. Luennolla tarkasteltiin edellisen tehtävän funktion käyttäytymistä, kun origoa lähestyttiin suoria $y = kx$ pitkin, missä $k \neq 0$. Täydennä tarkastelu koskemaan tapausta $k = 0$ ja myös sitä suoraa, jota ei voi esittää muodossa $y = kx$. Vihje: Origin kautta kulkevia suoria, joita ei voida esittää muodossa $y = kx$ on vain yksi, mikä?
4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määritelty lausekkeella $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Selvitä, onko tällä funktiolla olemassa raja-arvoa $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Ohje: Voita käyttää luennolla esitettyä napakoordinaatistomuunnosta tai jotain muuta tapaa.
5. $f(x, y) = 2x + 3y^2 - xy$ ja $y = 6x^3 + 4x - 1$. Laske $\frac{df}{dx}$.
6. $f(x, y) = 3x + 3y^2 - xy$. Laske $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$.
7. Määritä tehtävän 2 funktiolle 1. kertaluvun osittaisderivaatat.
8. Määritä tehtävän 4 funktiolle 1. kertaluvun osittaisderivaatat.
9. Määritä funktion $f(x, y) = xy^2 + 4x^2y + 2xy$ kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.