

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Huomioita ja määritelmiä

- $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$
- $|f_i(\mathbf{x}) - y_i| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \leq |f_1(\mathbf{x}) - y_1| + \dots + |f_n(\mathbf{x}) - y_n|$
- Jos f on jatkuva, ovat myös kaikki koordinaattifunktiot jatkuvia ja päinvastoin.
- Raja-arvo: Määrittely samoin kuin $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Raja-arvo: Ei riitä tarkastelu eri suunnista
- Jatkuvuus: Määrittely samoin kuin $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Määritelmä

Projektiot funktiot $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

Lause

Oletetaan, että f ja g ovat funktioita $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ja että

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = B$. Tällöin

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} p_i(\mathbf{x}) = a_i$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha A + \beta B$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = AB$
- Jos $B \neq 0$, niin $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{A}{B}$.

Lause

Jos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ ja

$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$, niin

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{z}_0.$$

Seuraus

Olkoot f ja g jatkuvia pisteessä $\mathbf{a}$ ja $g(\mathbf{a}) \neq 0$.

- Projektiofunktiot ovat jatkuvia kaikkialla.
- $\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{a}$
- $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{a}$.
- Edellisen lauseen merkinnän $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0$.

Esimerkki

Napakoordinaattimuunnos

Topologisia käsitteitä

- Suljetun välin yleistys 1: $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
- Suljetun välin yleistys 2: Kompakti joukko
- Avoimen välin yleistys 1: $B(\mathbf{x}, r)$ (avoin pallo)
- Avoimen välin yleistys 2: Avoin joukko

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät: $f_{x_i}(\mathbf{a})$ ja $D_{x_i}f(\mathbf{a})$. Jos muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää $D_i f(\mathbf{a})$ käytetään.

Huomautus

$(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) = \mathbf{a} + h\mathbf{e}_i$, joten

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Huomautus

Merkintöjen $\frac{df}{dx}$ ja $\frac{\partial f}{\partial x}$ ero, kun $f(x, y) = x^2 + y^2$ ja $y = 3x^2$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + \frac{d}{dx}9x^4 = 2x + 36x^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$

Esimerkki

Jos $f(x, y) = x \sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \sin(xy) + x \cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) &= \cos(xy)x + x \cos(xy) - xy \sin(xy)x \\ &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^2 \cos(xy)$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy).$$

Huomautus

On mahdollista että

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Lause

Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, niin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$