

# Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 2, 24.4.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Laske funktion  $f(x, y) = x + 2y$  integraali alueessa, jota rajoittavat suora  $y = x$  ja käyrä  $y = \sqrt{x}$ .
2. Laske funktion  $f(x, y) = x + 2y$  integraali alueessa, jota rajoittavat suorat  $y = 1$ ,  $y = x$ , ja  $y = 2x$ .

3. Laske

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx,$$

missä  $A$  on tason  $\mathbb{R}^2$  origokeskisen yksikköympyrän osa, jossa  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  (tason I neljännes).

4. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka lieriö  $x^2 + y^2 = 1$  leikkaa pallosta  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Ohje: Symmetrian vuoksi voit laskea sen kahdeksasosan tilavuuden, jossa  $x, y, z \geq 0$ . Laske aluksi sisin integraali  $z$ :n suhteen ja käytä  $xy$ -koordinaattien sijaan napakoordinaatteja.

5. Laske

$$\int_{y=0}^{\sqrt{3}} \int_{x=\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Ohje: Integrintialue on eräs ympyräsektori. Vihje: Saat ympyrän tarkastelemalla sisemmän integraalin ylärajaa. Selvitä sektorin kylkien kulmat alkeistrigonometrialalla, ja käytä sitten napakoordinaatteja.

6. Laske integraali

$$\int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=x}^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dy dx.$$

Ohje: Sijoita  $x = \frac{1}{2}(r-s)$ ,  $y = \frac{1}{2}(r+s)$ , piirrä alue uusien rajojen selvittämiseksi ja laske sijoitusfunktion Jacobin matriisin determinantti.

7. *Astroidi* on käyrä, jolla on parametriesitys  $\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid t \in [0, 2\pi)\}$ . Hahmottele kuva ja määritä astroidin reunakäyrän pituus.
8. *Bernoullin lemniskaatta* on käyrä, jolla on napakoordinaattiesitys  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  ( $a$  on vakio). Hahmottele kuva ja kirjoita lauseke reunakäyrän pituudelle.

Ohje: Parametriesitys saadaan napakoordinaattiesityksestä kirjoittamalla  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , paremetrina  $\theta$ .  $r$  pitää ratkaista napakoordinaattiesityksestä.

9. Määritä käyrän  $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  pituus välillä  $x \in [0, 1]$ .

**Huomautus:** Nyt kun muutkin demotehtävät on julkaistu, on numerointijärjestys muuttunut.