

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Fubinin lause

Olkoon $I = I_1 \times I_2$. Tällöin riittävän säännöllisyysoletuksin

$$\int_I f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

Erikoistapaus

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y})$, jolloin

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{I_2} f_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Esimerkkejä

Esimerkit 34–37 Esimerkit 3.24, 3.26, 3.27 (J. Lahtonen)

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Yleistys ?

Geometrinen luonnehdinta

$$|\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|$$

on vektoreiden $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ määrittämän suuntaissärmiön tilavuus

Seuraus

Jos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus ja I jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli, on

$$\mu(T(I)) = |\det(T)| \mu(I).$$

Seuraus

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ riittävän säännöllinen ja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $I(\mathbf{x})$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli, jonka yksi kärkipiste on $\mathbf{a}$ ja toinen $\mathbf{x}$. Tällöin

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\mu(f(I(\mathbf{x})))}{\mu(I(\mathbf{x}))} = |\det(J_f(\mathbf{a}))|$$

Syy:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \approx Df(\mathbf{a})\mathbf{x}$$

ja $J_f(\mathbf{a})$ on lineaarikuvauksen $Df(\mathbf{a})$ matriisi.

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Yleistys: Jos $g : U \rightarrow V$ on riittävän säännöllinen bijektio, on

$$\int_V f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_U f(g(\mathbf{x})) |\det(J_g(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}$$

Esimerkkejä

Esimerkit 38, 39, 40, 42

Esimerkki

Esimerkki 3.37 (J. Lahtonen)