

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Yleistys: Jos $g : U \rightarrow V$ on riittävän säännöllinen bijektio, on

$$\int_V f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_U f(g(\mathbf{x})) |\det(J_g(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}$$

Esimerkkejä

Esimerkit 38, 39, 40, 42

Esimerkkejä

Esimerkit 38, 39, 40, 42

Esimerkki

Esimerkki 3.37 (J. Lahtonen)

Käyrä

Käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on funktio $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, missä $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Merkitään

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Käyrä

Käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on funktio $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, missä $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Merkitään

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Käyrä on *sileä*, mikäli derivaatat $\gamma'_i(t)$ ovat jatkuvia.

Käyrä

Käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on funktio $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, missä $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Merkitään

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Käyrä on *sileä*, mikäli derivaatat $\gamma'_i(t)$ ovat jatkuvia.

Käyrän pituus

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}$$

Käyrän pituus

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Käyrän pituus

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 5.6 ja 5.7.

Tangentti

Käyrän γ tangentin suuntavektori:

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Tangentti

Käyrän γ tangentin suuntavektori:

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Vektorikentän käyräintegraali

Voimavektori $\mathbf{F}$, suuntavektori $\mathbf{s}$,

Tangentti

Käyrän γ tangentin suuntavektori:

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Vektorikentän käyräintegraali

Voimavektori $\mathbf{F}$, suuntavektori $\mathbf{s}$, projektion avulla työ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$

Määritelmä

Olkoon $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sileä käyrä. Vektorikentän $\mathbf{F}$ käyräintegraali käyrää γ pitkin määritellään

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$