

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Määritelmä

Pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on jatkuvan funktion kuva $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esimerkkejä

Esimerkit 49–52

Parametrimuoto

$$(u, v) \mapsto (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

Huomautus

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$$

On vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ generoimien suunnikkaan ala.

Parametrisoidun pinnan ala

Jos $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ on pinnan S (injektiivinen) parametriesitys, on

$$A = \int_E dA = \int_E \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 6.2. ja 6.3.

Huomautus

Jos pinta esitetään muodossa $z = f(x, y)$ tai $G(x, y, z) = 0$, on

$$\begin{aligned} dA &= \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial z}} \|\nabla G\| dx dy \end{aligned}$$

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ sekä $S = \{\phi(u, v) \mid (u, v) \in A\}$ pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Integraalia

$$\iint_{(u,v) \in A} f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

sanotaan skalaarifunktion f integraaliksi yli pinnan S

Määritelmä

Vektorikentän $\mathbf{f}$ integraali yli pinnan tarkoittaa vektorikentän kohtisuoran komponentin (skalaari) integroimista yli pinnan.

Pintaintegraali:

$$\iint_{(u,v) \in A} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dA,$$

missä $\mathbf{n}$ on pinnan (yksikkö)normaalivektori.
Parametrimuodossa tämä voidaan kirjoittaa

$$\iint_{(u,v) \in A} \mathbf{f}(\phi(u, v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \, du \, dv$$

Käyräintegraali (skalaarifunktio)

$$\int_a^b f \, ds = \int_a^b f(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt$$

Pintaintegraali (skalaarifunktio)

$$\int_a^b \int_c^d f \, dA = \int_a^b \int_c^d f(u, v) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

Käyräintegraali (vektorikenttä)

$$\int_a^b \mathbf{f} \, ds = \int_a^b \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt$$

Pintaintegraali (vektorikenttä)

$$\int_a^b \int_c^d \mathbf{f} \, dA = \int_a^b \int_c^d \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

Stokesin lauseen muotoja

Greenin lause

Greenin lause tasossa:

$$\iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial A} f_1 dx + f_2 dy$$

Abstrakti Stokesin lause

$$\int_{\partial A} f = \int_A df$$

Klassinen Stokesin lause

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

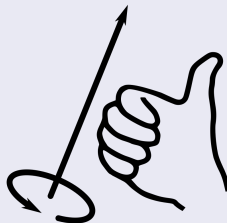
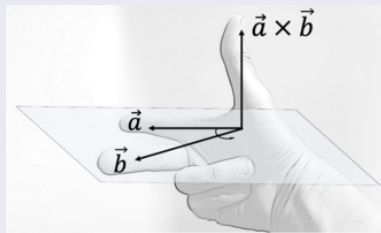
Nabla-merkinnät

Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Tällöin ajatellaan Nabla-operaattorin $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ avulla määriteltävän

- Gradientti: $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$
- Divergenssi: $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3$
- Pyörre (=curl ("Roottori")):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Oikean käden sääntö



Stokesin lauseen muotoja

Klassinen Stokesin lause

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

Greenin lause

Jos pinta rajoittuu xy -tasolle, saadaan klassisesta Stokesin lauseesta

$$\iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial A} f_1 dx + f_2 dy$$

Gaussin lause eli divergenssilause

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} dx dy dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Divergenssilauseen tulkintaa

Divergenssilause

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Tulkintaa

Jos $\nabla \cdot \mathbf{f}$ on jatkuva, on pienessä tilavuudessa V likimain vakio, siis

$$V \nabla \cdot \mathbf{f} \approx \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Näin ollen divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{f}$ edustaa (skaalattuna) vektorikentän $\mathbf{f}$ integraalia pinnan ∂V läpi ("vektorikentän lähde")

Klassisen Stokesin lauseen tulkintaa

Klassinen Stokesin lause

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

Tulkintaa

Jos $\nabla \times \mathbf{f}$ on jatkuva, on niinikään

$$\iint_A \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA \approx A(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n},$$

mutta samalla ylläolevan yhtälön mukaan kyseessä on (skaalattu) vektorikentän (normaalikomponentin) käyräintegraali alueen A reunan ympäri. Tämän vuoksi $\nabla \times \mathbf{f}$ katsotaan edustavan vektorikentän $\mathbf{f}$ *pyörteisyyttä*.

Maxwellin yhtälöt

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Selostusta

$\mathbf{E}$ on sähkökenttä, ρ varaustiheys, $\mathbf{B}$ on magneettikenttä, $\mathbf{J}$ on sähkövirran tiheys, ϵ_0 ja μ_0 ovat vakioita (tyhjiön permittiivisyys ja tyhjiön permeabiliteetti)

Maxwellin yhtälöt

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{n} = 0$$

$$\int_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{n}$$

$$\int_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \mu_0 \left(\iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{n} \right)$$

Selostusta

$\mathbf{E}$ on sähkökenttä, ρ varaustiheys, $\mathbf{B}$ on magneettikenttä, $\mathbf{J}$ on sähkövirran tiheys, ϵ_0 ja μ_0 ovat vakioita (tyhjiön permittiivisyys ja tyhjiön permeabiliteetti)