

Mika Hirvensalo

# Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2023



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Usean muuttujan funktioiden differentiaalilaskentaa</b>	5
1.1	Jatkuvuus	6
1.2	Osittaisderivaatat	9
1.3	Differentioituvuus	10
1.4	Suunnattu derivaatta	15
1.5	Ketjusääntö	16
1.6	Funktion ääriarvojen etsiminen	19
1.7	Sidotut ääriarvot, Lagrangen menetelmä	21
<b>2</b>	<b>Usean muuttujan funktioiden integraalilaskentaa</b>	25
2.1	Iteroidut integraalit	28
2.2	Sijoitus integraaliin	30
2.3	Vektorianalyysiä	33
2.3.1	Vektoriarvoisen funktion derivointi	33
2.3.2	Vektorifunktion käyräintegraali	34
2.3.3	Skalaarifunktion käyräintegraali	37
2.3.4	Pinta-ala	37
2.3.5	Skalaarifunktion pintaintegraali	39
2.3.6	Vektorikentän pintaintegraali	40
2.4	Stokesin lause	41
2.4.1	Greenin lause tasissa	41

**Huomioita sisällöstä:** Insinöörimatematiikan opintokokonaisuuden tarkoitus on esittää perustiedot valikoiduista matematiikan työkaluista, joita sovelletaan teknillisillä aloilla.

Yhden muuttujan differentiaali- ja integraalilaskenta yleistyy luontevasti myös useammalle muuttujalle, mutta tämä ei välttämättä ole aivan suoraviivaista. Erityisesti integraalilaskennassa tulee selvittää minkälaista objektia yleistetyn integraalikäsitteen tahdotaan kuvaavan.

Yleistystä tukevana rakenteena käytetään lineaarialgebraa ja siksi erityisesti kolmiulotteisen avaruuden lineaarialgebran hallinta on suotavaa.



# Luku 1

## Usean muuttujan funktioiden differentiaalilaskentaa

Tässä luvussa tarkastellaan yhden muuttujan funktioiden differentiaalilaskennan yleistä funktioille, joilla on useampia muuttujia kuin myös funktioille, joiden arvoa ei kuvata yhdellä vaan useammalla reaalityylillä.

Jos funktiolla ajatellaan olevan  $n$  reaalista muuttujaa ja funktion arvon ilmaisee  $m$  reaalilukua, voidaan ajatella, että funktio on määritelty jossakin  $\mathbb{R}^n$ :n osajoukossa ja että funktio saa arvokseen  $\mathbb{R}^m$ :n vektorin.

Luonteva tapa käsitellä usean muuttujan funktioita on siis tarkastella funktioita  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , jolloin muodollisesti funktiolla  $f$  on vain yksi muuttuja  $\mathbf{x}$ , johon kuitenkin sisältyy  $n$  koordinaattia:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

On myös huomattava, että funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  voidaan jakaa  $m$ :ksi funktioksi  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , jolloin siis funktion arvo ( $\mathbb{R}^m$ :n vektori) pisteessä  $\mathbf{x}$  ( $\mathbb{R}^n$ :n vektori) voidaan esittää muodossa  $(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ , missä kukin  $f_i$  on funktio  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Näin esitettynä funktioita  $f_i$  sanotaan alkuperäisen funktion  $f$  komponenttifunktioiksi tai joskus myös koordinaattifunktioiksi. Tällöin merkitään myös  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Tällaisista funktioista yksinkertaisimpia ovat kurssin alkuosassa tarkastellut lineaarikuvaukset, joissa jokainen  $f_i$  on ensimmäisen asteen polynomi jokaisen argumenttinsa suhteen

*Esimerkki 1.* Jos  $A$  on  $m \times n$ -matriisi, määrittelee matriisikertolasku  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$  funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Tälle funktiolle pätee  $f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aA\mathbf{x} + bA\mathbf{y} = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y})$ . Lineaarikuvausten rooli usean muuttujan differentiaalilaskennassa on samankaltainen kuin käyrän approksimointi suoralla yhden muuttujan differentiaalilaskennassa.

*Esimerkki 2.* Tason esitys napakoordinaateista  $xy$ -koordinaatteihin määrittelee kahden muuttujan funktion, jolla on myös kaksi reaalista arvoa. Napakoordinaattiesityksessä

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$r$  merkitsee pisteen  $(x, y)$  etäisyyttä origosta ja  $\theta$  origosta pisteeseen  $(x, y)$  kulkevan janan ja  $x$ -akselin välistä kulmaa. Muunnos napakoordinaateista  $xy$ -koordinaatteihin voidaan siis kirjoittaa funktiona  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Komponenttifunktiot  $f_1(r, \theta) = r \cos \theta$  ja  $f_2(r, \theta) = r \sin \theta$ , ja näillä merkinnöillä

$$f(r, \theta) = (f_1(r, \theta), f_2(r, \theta)).$$

*Esimerkki 3.* Pallokoordinaateissa  $(r, \theta, \phi)$   $r \in [0, \infty)$  merkitsee pisteen etäisyyttä origosta,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , kulmaa  $xz$ -tason ja  $\phi \in [0, \pi)$  kulmaa  $z$ -akselin välillä. Yhteys  $xyz$ -koordinaatiston välillä voidaan esittää seuraavasti:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \phi. \end{cases}$$

Jos merkitään  $f_1(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \sin \phi$ ,  $f_2(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \sin \phi$  ja  $f_3(r, \theta, \phi) = r \cos \phi$ , on muunnos pallokoordinaateista suorakulmisiin koordinaatteihin esitettävissä funktiona  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(r, \theta, \phi) = (f_1(r, \theta, \phi), f_2(r, \theta, \phi), f_3(r, \theta, \phi))$ .

Funktioilla, joiden määrittelyjoukko on jokin kolmiulotteisen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  osajoukko, saattaa olla fysikaalinen tulkinta, olipa maalijoukko  $\mathbb{R}:n$ ,  $\mathbb{R}^2:n$  tai  $\mathbb{R}^3:n$  osajoukko.

*Esimerkki 4.* Jatkuva funktio  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  esittää pintaa  $z = f(x, y)$ . Esimerkiksi  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2$  määrittelee hyperbolisen paraboloidin  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ .

*Esimerkki 5.* Jatkuva funktio  $f = (f_1, f_2, f_3), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  esittää käyrää kolmiulotteisessa avaruudessa. Jos jokainen komponenttifunktio  $f_i$  on lisäksi derivoituva, sanotaan, että käyrä on *sileä*.

*Esimerkki 6.* Funktio  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  voi esittää fysikaalista *skalaarisuuretta*. Esimerkiksi kolmiulotteisen kappaleen lämpötilaa  $T$  pisteessä  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  voidaan esittää funktiolla  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T = f(\mathbf{x})$ .

*Esimerkki 7.* Niin sanottuihin *vektorisuureisiin* liittyy suuruuden (itseisarvon) lisäksi myös suunta. Esimerkiksi magneettikentän voimakkuutta ja suuntaa kussakin avaruuden  $\mathbb{R}^3$  pisteessä esittää kolmiulotteinen vektori – siis avaruuden  $\mathbb{R}^3$  alkio. Täten magneettikenttää voidaan esittää funktiolla  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , missä  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  on magneettikenttään suuntaa ja voimakkuutta kuvaava vektori  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  pisteessä  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

## 1.1 Jatkuvuus

Usean muuttujan funktioiden yhdeydessä tarvitaan Insinöörimatematiikka IIA:ssa esitettyjä käsitteitä. Vektoreiden  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ja  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  *pistetulo* (*sisätulo*) määriteltiin  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ , ja tämän perusteella vektorin  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  *pituus* (*normi*)  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ .

**Lause 1.** Vektoreille  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ja  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  pätevät seuraavat epäyhtälöt:

- $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ ,
- $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$ .

*Todistus.* a)-kohta on Lineaarialgebrasta tuttu Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö, b)-kohta jätetään harjoitustehtäväksi.

Normikäsitteiden perusteella määritellään avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  vektoreiden etäisyys.

**Määritelmä 1.** Vektoreiden  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  *etäisyys* määritellään

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Edellisen määritelmän mukainen etäisyys vastaa  $\mathbb{R}^3$ :ssa ja  $\mathbb{R}^2$ :ssa tavanomaista eukliidista etäisyyttä ja normin kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Myös käsitteillä *raja-arvo* ja *jatkuvuus* on välitön vastineensa usean muuttujan funktioiden teoriassa.

**Määritelmä 2 (Raja-arvo).** Olkoon  $f$  funktio  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sanotaan, että *funktion  $f$  raja-arvo* pisteessä  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  on  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  ja merkitään

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

mikäli  $f(\mathbf{x})$  saadaan miten tahansa lähelle pistettä  $\mathbf{y}$ , kunhan vain  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  valitaan riittävän läheltä pistettä  $\mathbf{a}$ .

Täsmällisemmin ilmaistuna: Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  raja-arvo pisteessä  $\mathbf{a}$  on  $\mathbf{y}$ , jos jokaista positiivilukua  $\varepsilon$  on olemassa luku  $\delta_\varepsilon > 0$  siten että

$$d(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) < \varepsilon,$$

mikäli

$$0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta_\varepsilon.$$

Myös jatkuvuuden määritelmä voidaan esittää samankaltaisena kuin reaali lukujen tapauksessa:

**Määritelmä 3.** Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on *jatkuva* pisteessä  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , jos  $f$  on ensinnäkin määritelty pisteessä  $\mathbf{a}$  ja jos jokaista positiivilukua  $\varepsilon$  kohti on olemassa positiiviluku  $\delta_\varepsilon$  siten, että

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a})) < \varepsilon,$$

kunhan  $\mathbf{x}$  on valittu niin läheltä  $\mathbf{a}$ :ta, että

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta_\varepsilon.$$

*Huomautus 1.* Merkintää  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  käyttämällä jatkuvuuden määritelmä voidaan kirjoittaa seuraavasti: Jokaista positiivilukua  $\varepsilon$  kohti on olemassa  $\delta_\varepsilon > 0$  siten, että

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon \quad \text{aina kun} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_\varepsilon.$$

Usean muuttujan funktion jatkuvuus voidaan päätellä komponenttifunktioiden jatkuvuudesta, kuten seuraava lause asian ilmaisee.

**Lause 2.** Jos funktiot  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ovat kaikki jatkuvia pisteessä  $\mathbf{a}$ , niin myös funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$ . Kääntäen, jos funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$ , ovat kaikki komponenttifunktiot  $f_i$  jatkuvia pisteessä  $\mathbf{a}$ .

*Todistus.* Jos kukin komponenttifunktio  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, on positiivilukua  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  kohti olemassa luku  $\delta_i > 0$  jolle pätee  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_i \implies |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{a})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ . Kun valitaan  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ , saadaan

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|^2 &= (f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{a}))^2 + \dots + (f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{a}))^2 \\ &< \frac{\varepsilon^2}{n} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2, \end{aligned}$$

mikä kertoo sen, että  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|$  saadaan kyllä pienemmäksi kuin  $\varepsilon$ , kunhan vain  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$  on pienempi kuin  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ .

Oletetaan sitten, että  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva ja näytetään, että kaikki komponenttifunktiot  $f_i$  ovat jatkuvia. Tätä varten voidaan todeta, että

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{a})|^2 \leq |f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{a})|^2 + \dots + |f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{a})|^2 = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|^2.$$

Funktion  $f$  jatkuvuus merkitsee sitä, että  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|$  saadaan mielivaltaisen pieneksi, kun  $\mathbf{x}$  valitaan kyllin läheltä pistettä  $\mathbf{a}$ . Näin ollen komponenttifunktioiden jatkuvuus seuraa suoraan epäyhtälöstä

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{a})| \leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|.$$

Edellisen lauseen mukaan funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jatkuvuus on sama asia kuin komponenttifunktioiden  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvuus. Tällöin siis on vielä tarkasteltava, miten funktioiden  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvuutta voitaisiin käsitellä.

**Lause 3.** Projektiofunktiot  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$  ovat jatkuvia. Lisäksi

1. Jos  $f$  ja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ovat jatkuvia pisteessä  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , niin myös funktio  $\alpha f + \beta g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on.
2. Funktio  $f/g$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$  jos  $f$  ja  $g$  ovat.
3. Funktio  $\frac{f}{g}$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$ , jos  $g(\mathbf{a}) \neq 0$ .

*Todistus.* Projektiofunktioiden jatkuvuus seuraa suoraan epäyhtälöstä  $|x_i - a_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ . Lauseen muut kohdat todistetaan oikeaksi samalla tavalla kuin vastaavat tulokset reaalfunktioille.

**Lause 4 (Yhdistetty funktio).** Jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  ja  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  jatkuva pisteessä  $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ , niin yhdistetty funktio  $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$ .

*Todistus.* Todistus on täsmälleen samankaltainen kuin vastaavan, reaalfunktioita koskevan tuloksen todistus: On näytettävä toteen, että  $\|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a}))\|$  saadaan mielivaltaisen pieneksi, kunhan  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$  valitaan kyllin pieneksi (harjoitustehtävä).

*Esimerkki 8.* Näytetään, että esimerkin 2 funktio

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

on jatkuva. Lauseen 2 perusteella riittää osoittaa, että komponenttifunktiot  $f_1(r, \theta) = r \cos \theta$  ja  $f_2(r, \theta) = r \sin \theta$  ovat jatkuvia.

Ensinnäkin voidaan todeta, että funktiot  $(r, \theta) \rightarrow r$  ja  $(r, \theta) \rightarrow \theta$  ovat projektiofunktioina jatkuvia (lause 3). Funktio  $(r, \theta) \rightarrow \cos \theta$  taasen on jatkuva jatkuvien funktioiden  $(r, \theta) \rightarrow \theta$  ja  $\theta \rightarrow \cos \theta$  yhdistettynä funktiona. Edelleen, funktio  $f_1(r, \theta) = r \cos \theta$  on jatkuva jatkuvien funktioiden  $(r, \theta) \rightarrow r$  ja  $(r, \theta) \rightarrow \cos \theta$  tulona jatkuva. Samoin voidaan todeta, että komponenttifunktio  $f_2$  on jatkuva.

Usean muuttujan funktioiden raja-arvo on kuitenkin ongelmallisempi käsite kuin vastaava yhden muuttujan tapauksessa. Voidaan nimittäin ajatella, että jotakin pistettä  $\mathbf{a}$  lähestytään eri suunnista.

*Esimerkki 9.* Tarkastellaan funktiota  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \quad (1.1)$$

Funktio ei ole määritelty origossa, mutta jos origoa lähestytään suoraa  $y = kx$  pitkin, on tällä suoralla

$$f(x, kx) = \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Tästä seuraa, että funktion (1.1) arvoa origossa ei voi määrittellä siten, että funktiosta tulisi origossa jatkuva, sillä kutakin  $k$ :n arvoa kohti saadaan oma raja-arvonsa.

Täten siis jo  $\mathbb{R}^2$ :ssa voi olla äärettömän monta eri raja-arvoa lähestyttäessä tarkasteltavaa pistettä eri suunnista. Koska reaaliakselilla  $\mathbb{R}$  suuntia oli vain kaksi, oli mahdollisia raja-arvojakin vain kaksi: oikeanpuoleinen tai vasemmanpuoleinen.

Eri lähestymissuuntien lisäksi on myös mahdollisesti olemassa eri lähestymistapoja (esim. pistettä lähestyvää spiraalaa pitkin), joilla saadaan erilaisia raja-arvoja funktiolle  $f$ . Jos kuitenkin määritelmän 2 ehto pätee, tuottavat kaikki mahdolliset lähestymistavat saman raja-arvon.

Jatkuvuuden käsite yleistettiin aiemmin ja derivoituvuuden käsite usean muuttujan funktioille esitetään tuota pikaa. Myös suljetun välin käsite on melko suoraviivaista yleistää  $\mathbb{R}^n$ :ään: suljettu väli  $[a, b]$  voidaan yleistää karteesiseksi tuloksi.

**Määritelmä 4.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  suljettu väli on karteesinen tulo

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]. \quad (1.2)$$

Avaruudessa  $\mathbb{R}^2$  välin geometrinen vastine on suorakaide ja avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  suorakulmio. Kun  $n > 3$ , visuaalinen esitysmahdollisuus puuttuu, mutta tästä huolimatta joukkoa (1.2) kutsutaan myös avaruuden  $\mathbb{R}^n$  suorakulmioksi.

Näin yleistetty välin käsite ei kuitenkaan ole tarkoituksenmukaisin funktioden ääriarvoja etsittäessä. Osoittautuu, että tällöin luontevin suljetun välin yleistys on *kompakti* joukko.

**Määritelmä 5.**  $R$ -säteinen,  $\mathbf{x}$ -keskinen avoin pallo avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  on joukko

$$B(\mathbf{x}, R) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < R\}.$$

Pallo  $B(\mathbf{x}, R)$  siis koostuu niistä avaruuden  $\mathbb{R}^n$  pisteistä, jotka ovat alle  $R$ :n etäisyydellä pisteestä  $\mathbf{x}$ .



**Määritelmä 6.** Joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on *kompakti* jos se on sekä suljettu että rajoitettu (nämä käsitteet määritellään seuraavaksi).

**Määritelmä 7.** Joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on *rajoitettu* jos on olemassa sellainen  $M$ , että  $\|x\| \leq M$  aina, kun  $x \in A$ . Toisin sanoen,  $A$  on rajoitettu joukko, jos se sisältyy johonkin origokeskiseen,  $M$ -säteiseen palloon.

*Esimerkki 10.*  $x$ -akseli  $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  ei ole rajoitettu, sillä  $\|(x, 0, 0)\| = |x|$  joten siis  $x$ -akselilla on pisteitä, joilla on miten suuri normi tahansa.

*Esimerkki 11.* Ellipsoidi  $(\frac{x}{2})^2 + y^2 + 9z^2 = 1$  on rajoitettu, sillä jokainen ellipsoidin piste toteuttaa  $1 = (\frac{x}{2})^2 + y^2 + 9z^2 \geq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = \frac{1}{4}\|(x, y, z)\|^2$ , joten  $\|(x, y, z)\| \leq 2$ .

*Esimerkki 12.* Yksivaippainen hyperboloidi  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  ei ole rajoitettu, sillä siihen kuuluu pisteitä  $(a, 1, a)$ , joiden normi  $\|(a, 1, a)\| = \sqrt{2a^2 + 1}$  voi olla miten suuri tahansa.

**Määritelmä 8.** Joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on *suljettu* jos sen komplementti  $\mathbb{R}^n \setminus A$  on avoin.

**Määritelmä 9.** Joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on *avoin*, jos sen jokaisen pisteen  $x$  ympärille voidaan asettaa jokin  $\varepsilon$ -säteinen pallo  $B(x, \varepsilon)$ , joka sisältyy joukkoon  $A$ .

*Esimerkki 13.* Pallo  $B(x, r)$  on avoin joukko, sillä jos  $y \in B(x, r)$ , on määritelmän mukaan  $d = \|y - x\| < r$ , joten pisteen  $y$  ympärille piirtää  $\frac{r-d}{2}$ -säteinen, joukkoon  $B(x, r)$  sisältyvä avoin pallo.

*Esimerkki 14.* Joukko

$$\bar{B}(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq R\}$$

on suljettu joukko, sillä sen komplementti  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x, R)$  on avoin. Tämä nähdään siten, että jos  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x, R)$ , on  $d = \|y - x\| > R$  ja tällöin pisteen  $y$  ympärille voidaan piirtää  $\frac{R-d}{2}$ -säteinen, joukkoon  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x, R)$  kuuluva pallo.

*Esimerkki 15.*  $\mathbb{R}$ :ssä suljetut välit  $[a, b]$  ovat suljettuja joukkoja ja avoimet välit  $(a, b)$  avoimia joukkoja. Puoliavoimet välit  $[a, b)$  tai  $(a, b]$  eivät ole suljettuja eivätkä avoimia joukkoja.

Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  joukko voidaan usein nähdä suljetuksi käyttämällä seuraavaa lausetta, jonka todistus sivuutetaan.

**Lause 5.** Jos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja  $A$  on suljettu  $\mathbb{R}^n$  joukko, niin myös  $f^{-1}(A)$  on suljettu.

Lisäksi pätee seuraava tulos:

**Lause 6.** Suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu. Äärellisen monen suljetun joukon unioni on suljettu.

*Todistus.* Harjoitustehtävä.

*Esimerkki 16.* Avaruuden  $\mathbb{R}^3$  yksikköpallon pinta  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  on suljettu joukko, sillä on suljetun joukon  $[1, 1] = \{1\}$  alkukuva jatkuvassa kuvauksessa  $f(x, y, z) = \|(x, y, z)\|$  (miksi tämä kuvaus on jatkuva?).

Myös yksikköpallo  $\bar{B}(0, 1)$ , jonka määrittää epäyhtälö  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  on suljettu joukko, sillä se on suljetun joukon  $[0, 1]$  alkukuva  $f^{-1}([0, 1])$ .

**Lause 7.** Kompaktissa joukossa  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  määritellyllä jatkuvalla funktiolla  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  on sekä maksimi että minimi.

*Todistus.* Sivuuetaan.

## 1.2 Osittaisderivaatat

Osittaisderivaatan käsitettä on käsitelty jo jonkin verran Differentiaali- ja integraalilaskennan yhteydessä. Kerrataan ja yleistetään tämä käsite ja esitetään jatkossa tarvittava tulos osittaisderivoinnin järjestyksen vaihtamisesta.

**Määritelmä 10.** Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  osittaisderivaatta  $i$ :n muuttujan  $x_i$  suhteen pisteessä  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Osittaisderivaatista  $i$ :n muuttujan suhteen käytetään myös merkintöjä  $f_{x_i}(\mathbf{a})$  ja  $D_{x_i}f(\mathbf{a})$ . Jos muuttujien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  järjestys on kiinteä, niin osittaisderivaatista  $D_{x_i}f(\mathbf{a})$  käytetään myös merkintää  $D_i f(\mathbf{a})$ .

**Määritelmä 11.** Toisen kertaluvun osittaisderivaatoista käytetään merkintöjä  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ,  $f_{x_i x_j}$ ,  $D_{x_i x_j} f$ , tai  $D_{ij} f$ .

**Lause 8.** Jos osittaisderivaatat  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  ja  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  ovat olemassa jossakin pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristössä ja jatkuvia pisteessä  $\mathbf{a}$ , niin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

*Todistus.* Pitkä, sivuutetaan.

### 1.3 Differentioituvuus

Palautetaan mieleen differentiaalilaskennasta käsite derivoituvuus: Sanotaan, että reaalifunktio  $f$  on *derivoituva* pisteessä  $x$ , jos on olemassa sellainen luku  $k$  ja funktio  $\varepsilon(h)$ , että  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$  ja

$$f(x+h) - f(x) = kh + \varepsilon(h)h. \quad (1.3)$$

Yhtälö (1.3) ilmaisee sen, että funktion arvon muutosta  $f(x+h) - f(x)$  (pisteessä  $x$ ) voidaan arvioida  $x$ :n muutoksen  $h$  ensimmäisen asteen polynomifunktiona  $h \mapsto k \cdot h$ :

$$f(x+h) - f(x) \approx k \cdot h,$$

kun  $h$  on pieni. Yhtälössä (1.3) esiintyvää lukua  $k$  kutsutaan funktion  $f$  *derivaataksi* pisteessä  $x$  ja merkitään  $k = f'(x)$ . On siis huomattava, että yhtälössä (1.3) esiintyvä luku  $k$  (samoin kuin funktio  $\varepsilon(h)$ ) voi riippua pisteen  $x$  arvosta.

*Esimerkki 17.* Olkoon  $f(x) = x^2 - x + 2$ . Tällöin

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 - (x+h) + 2 - (x^2 - x + 2) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 2 - x^2 + x - 2 \\ &= 2xh - h + h^2 = (2x-1)h + h^2 \\ &= (2x-1)h + \varepsilon(h)h, \end{aligned}$$

kun merkitään  $\varepsilon(h) = h$ . Täten siis  $f'(x) = 2x - 1$  ja yllä olevan yhtälön mukaisesti lauseketta  $f(x+h) - f(x)$  (funktion  $f$  muutosta) voidaan approksimoida lausekkeella  $(2x-1)h$   $h$ :n ollessa pieni.

On myös huomattava, että derivaatan määritelmässä esiintyvä funktio  $f(h) = k \cdot h$  on *lineaarinen*, toisin sanoen  $f(ah_1 + bh_2) = k(ah_1 + bh_2) = akh_1 + bkh_2 = af(h_1) + bf(h_2)$ .

Lineaarikuvauksen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suoraviivainen yleistys on käsitelty Lineaarialgebran kurssissa: lineaarikuvauks  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  voidaan esittää  $m \times n$ -matriisin  $A$  avulla, jolloin

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax},$$

kun  $\mathbf{x}$  ajatellaan sarakevektoriksi ( $n \times 1$ -matriisiksi).

Derivaatan käsite yleistetään käyttämällä lineaarisen approksimaation vaatimusta. Tällöin myös termi ”derivoituvuus” korvataan termillä ”differentioituvuus”.

**Määritelmä 12.** Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on *differentioituva* pisteessä  $\mathbf{x}$ , jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , että

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \varepsilon(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|,$$

missä  $\varepsilon(\mathbf{h})$  on ehdon  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \varepsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$  toteuttava funktio  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Määritelmä 13.** Jos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on differentioituva, kutsutaan määritelmän (12) lineaarikuvausta  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funktion  $f$  (*Fréchet'n*) *derivaataksi* pisteessä  $\mathbf{x}$  ja siitä käytetään merkin­ tää  $Df(\mathbf{x})$ . Derivaatan  $Df(\mathbf{x})$  matriisia kutsutaan *Jacobin matriisiksi* (pisteessä  $\mathbf{x}$ ) ja merkitään  $J_f(\mathbf{x})$ .

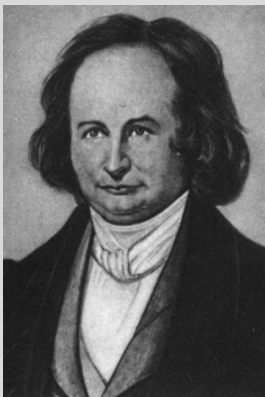
#### Taustatietoa



Maurice Fréchet (1878–1973) oli ranskalainen matemaatikko. Hän kehitti topologiaa, ns. metristen avaruuksien käsitteen ja esitti yleisen määritelmän derivaatalle metrisissä avaruuksissa. Hän esitti mm. tällä kurssilla käytettävän kompaktiuden käsitteen.

(kuva: Wikimedia Commons)

#### Taustatietoa



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) oli saksalainen matemaatikko, joka kehitti ns. elliptisten funktioiden teoriaa, differentiaaliyhtälöiden teoriaa, sekä Newtonin mekaniikkaa yleisempään muotoon. Jacobia pidettiin myös erinomaisena opettajana.

(kuva: Wikimedia Commons)

Differentioituvuus pisteessä  $\mathbf{x}$  tarkoittaa siis sitä, että funktion  $f$  muutosta  $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$  voidaan approksimoida lineaarikuvauksella niin hyvin, että approksimaation virhetermi lähestyy nollaa hyvin voimakkaasti, kun  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Välittömästi voidaan nähdä, että  $f(\mathbf{x} + \mathbf{0}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , joten  $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$  – ominaisuus, joka on voimassa kaikille lineaarikuvauksille. Jos funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  komponenttifunktiot voidaan esittää

Taylorin polynomien avulla, voidaan määritelmässä esiintyvä lineaarikuvaus saada esille suoraviivaisesti erottamalla lausekkeen  $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$  1. asteen termit korkeamman asteen termeistä.

*Esimerkki 18.* Tarkastellaan esimerkin 2 funktion  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  differentioituvuutta pisteessä  $\mathbf{0} = (0, 0)$ .

Tällöin on siis arvioitava muutosta

$$f(\mathbf{0} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{h}) = (h_1 \cosh_2, h_1 \sinh_2)$$

kun vektori  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$  on lähellä nollaa. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} (h_1 \cosh_2, h_1 \sinh_2) &= (h_1(1 - O(h_2)), h_1 \cdot O(h_2)) = (h_1 - h_1 O(h_2), h_1 O(h_2)) \\ &= (h_1, 0) + (h_1 O(h_2), h_1 O(h_2)). \end{aligned}$$

Nyt siis lineaarikuvaus  $T(h_1, h_2) = (h_1, 0)$  on funktion  $f$  Fréchet'n derivaatta pisteessä  $(0, 0)$ . Muodollista todistusta varten tulee vielä arvioida jäännöstermiä:  $(h_1 O(h_2), h_1 O(h_2))$ . Merkitään

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^{-1} (h_1 O(h_2), h_1 O(h_2)),$$

jolle saadaan arvio

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}), \mathbf{0})^2 &= \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h})\|^2 = \|\mathbf{h}\|^{-2} ((h_1 O(h_2))^2 + (h_1 O(h_2))^2) \\ &\leq \|\mathbf{h}\|^{-2} C h_1^2 h_2^2 \leq C \|\mathbf{h}\|^{-2} \|\mathbf{h}\|^4 = C \|\mathbf{h}\|^2 = C d(\mathbf{h}, \mathbf{0})^2, \end{aligned}$$

joten  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$ , kun  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Yllä esiintyvä vakio  $C$  saadaan ordomerkin vakiosta.

*Huomautus 2.* Lineaarikuvaus  $T(h_1, h_2) = (h_1, 0)$  matriisi on  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , sillä  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Lineaarikuvaus  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  matriisi puolestaan on muotoa  $1 \times n$ , siis vaakavektori, jolloin siis lineaarikuvaus  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on muotoa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x},$$

missä  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$  tarkoittaa vektoreiden  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ja  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  pistetuloa. Täten lineaarikuvaus  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  voidaan siis yhtä hyvin kirjoittaa muotoon  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ .

*Huomautus 3.* Funktioille  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineaarikuvaus saa muodon

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (a \ b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by.$$

Tällöin siis differentioituvuus pisteessä  $\mathbf{x}_0$  funktiolle  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = ah + bk + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|, \quad (1.4)$$

missä on merkitty  $\mathbf{h} = (h, k)$ . Jos edelleen merkitään  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ , voidaan (1.4) kirjoittaa muotoon

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \boldsymbol{\varepsilon}(h, k) \sqrt{h^2 + k^2}, \quad (1.5)$$

missä  $\boldsymbol{\varepsilon}(h, k) \rightarrow (0, 0)$  kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Yhtälön (1.5) mukaan muutosta pisteestä  $z_0 = f(x_0, y_0)$  pisteeseen  $z = f(x_0 + h, y_0 + k)$  voidaan arvioida lineaarisen lausekkeen avulla:

$$z - z_0 \approx ah + bk.$$

Kun merkitään  $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$ , voidaan ylläoleva approksimaatio kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 \approx a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Tasoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad (1.6)$$

sanotaan pinnan  $z = f(x, y)$  *tangenttitasoksi* pisteessä  $(x_0, y_0)$ .

**Lause 9.** Jos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$ , ovat kaikki osittaisderivaatat  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  pisteessä  $\mathbf{x}$  olemassa, ja lineaarikuvauksen  $T$  matriisi (Jacobin matriisi) on

$$(J_f(\mathbf{x}))_{ij} = T_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

*Todistus.* Väittämä seuraa tarkastelemalla muotoa  $\mathbf{h} = (0, \dots, h_j, \dots, 0)$  olevia muutosvektoreita. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.  $\square$

*Huomautus 4.* Edellisen lauseen mukaan huomautuksessa 3 on

$$(a \ b) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \ \frac{\partial f}{\partial y}(y_0) \right),$$

jolloin siis tangenttitason yhtälö (1.6) saa muodon

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Pinnan  $z = f(x, y)$  tangenttitason normaalivektori pistessä  $(x_0, y_0)$  on siis

$$\left( \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(y_0)}{\partial y}, -1 \right).$$

Yleisemmin voidaan osoittaa, että pinnan  $F(x, y, z) = 0$  normaaliksi voidaan valita vektori

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

*Esimerkki 19.* Pisteessä  $(r, \theta)$  esimerkin (18) funktion  $f(r, \theta) = (f_1(r, \theta), f_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  Jacobin matriisi on

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Jos valitaan  $(r, \theta) = (0, 0)$  saadaan Jacobin matriisiksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mitä vastaava lineaarikuvaus on

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

joka löydettiin jo esimerkin 18 yhteydessä.

Edellisessä lauseessa mainittujen osittaisderivaattojen olemassaolosta pisteessä  $\mathbf{x}$  ei kuitenkaan seuraa välttämättä funktion  $f$  differentioituvuus. Differentioituvuus voidaan kuitenkin taata mikäli osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

**Lause 10.** Oletetaan, että funktiolla  $f = (f_1, \dots, f_m)$  on jossakin pisteen  $\mathbf{x}$  ympäristössä olemassa osittaisderivaatat  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , jotka ovat jatkuvia pisteessä  $\mathbf{x}$ . Tällöin  $f$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$ .

**Määritelmä 14.** Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , Jacobin matriisia ( $1 \times n$ -matriisi eli vaakavektori) kutsutaan *gradientiksi* ja merkitään

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Merkintä  $\nabla f$  luetaan ” $f$ :n gradientti” tai ”nabla  $f$ ”.

*Huomautus 5.* Edellisen määritelmän merkintää käyttäen funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  Jacobin matriisi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

*Huomautus 6.* Huomautuksen 4 mukaan gradientilla on geometrinen tulkinta: pinnan  $F(x, y, z) = 0$  normaaliksi voidaan valita  $\nabla F$ . Myöhemmin nähdään, että muissa yhteyksissä gradientilla on myös toisenlaisia geometrisia tulkintoja.

*Esimerkki 20.* Olkoon  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$ , jolloin gradientti pisteessä  $(x, y, z)$  on

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left( \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{y}{z}, \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{x}{z}, -\cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{xy}{z^2} \right).$$

**Määritelmä 15 (Kokonaisdifferentiaali).** Funktiolle  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituvuusehto voidaan edellämainitun perusteella kirjoittaa muotoon

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon(\mathbf{h}),$$

missä  $\varepsilon(\mathbf{h}) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{0}) = 0$  kun  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Differentioituvuuden määritelmässä esiintyvää lineaarista osaa

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} h_n$$

kutsutaan funktion  $f$  *kokonaisdifferentiaaliksi* pisteessä  $\mathbf{x}$ . Jos merkitään  $h_i = dx_i$  ja  $df = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ , voidaan kokonaisdifferentiaalilauseke kirjoittaa muotoon

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Koska differentioituvuuden ehdossa jälkimmäinen epälineaarinen osa  $\|\mathbf{h}\| \varepsilon(\mathbf{h})$  lähestyy nollaa epsilonon lähestyessä nollaa, on kokonaisdifferentiaali tarkentuva approksimaatio muutokselle

$$f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, \dots, x_n);$$

sitä tarkempi mitä lähempänä nollavektoria vektori  $(dx_1, \dots, dx_n)$  on.

*Esimerkki 21.* Arvioidaan, kuinka paljon tulo  $xy$  muuttuu, jos mitatuissa arvoissa  $x = 10$  ja  $y = 50$  on virhe  $(dx, dy)$ , jolle pätee  $|dx| \leq 0,1$  ja  $|dy| \leq 0,2$ . Tällä siis tarkoitetaan, että todelliset arvot ovat välillä  $x \in [10 - \frac{1}{10}, 10 + \frac{1}{10}]$  ja  $y \in [50 - \frac{2}{10}, 50 + \frac{2}{10}]$ .

Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(xy) = xy$  kokonaisdifferentiaali on

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = y dx + x dy.$$

Jos tällöin esimerkiksi  $(x, y) = (10, 50)$  ja  $|dx| \leq 0,1$  sekä  $|dy| \leq 0,2$  on

$$|df| = |50 \cdot dx + 10 \cdot dy| \leq 50|dx| + 10|dy| \leq 50 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,2 = 7.$$

On kuitenkin huomattava, että näin saatu yläraja (7) virheelle koskee vain *kokonaisdifferentiaal*in  $df$  itseisarvoa, ei *todellisen muutoksen* itseisarvoa. Toisaalta taas kokonaisdifferentiaali on hyvä likimääräistys todelliselle muutokselle, kun muutos on pieni suhteessa alkuperäiseen arvoon  $(10, 50)$ . Tämän esimerkin lukuarvoilla kokonaisdifferentiaali antaa melko hyvän arvion funktion todellisen arvon muutoksesta.

## 1.4 Suunnattu derivaatta

**Määritelmä 16.** Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  sellainen, että  $\|\mathbf{u}\| = 1$ . Jos raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}))$$

on olemassa, sitä sanotaan  $f$ :n *suunnatuksi derivaataksi* tai *Gâteaux'in derivaataksi* pisteessä  $\mathbf{x}$  suuntaan  $\mathbf{u}$ . Suunnatusta derivaatasta käytetään merkintöjä  $\partial_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} f(\mathbf{x})$  ja  $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ .

### Taustatietoa

René Gâteaux (1889–1914) oli ranskalainen matemaatikko, joka tunnetaan suunnatun derivaatan käsitteestä. Hän kuoli taistelussa 1. maailmansodan alkupäivinä

Suunnattu derivaatta yleistää osittaisderivaatan käsitteen: Jos nimittäin valitaan  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (luonnollisen kannan  $i$ :s vektori), huomataan että suunnattu derivaatta vektorin  $\mathbf{e}_i$  suhteen on sama kuin osittaisderivaatta muuttujan  $x_i$  suhteen.

Jos tarkasteltava funktio on differentioituva (kuten yleensä on laita tässä kurssissa), on suunnatulla derivaatalla yhteys gradienttiin:

**Lause 11.** Jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$  ja  $\|\mathbf{u}\| = 1$ , niin suunnattu derivaatta  $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$  on olemassa ja

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

(vektorien  $\nabla f(\mathbf{x})$  ja  $\mathbf{u}$  pistetulo).

*Todistus.* Differentioituvuuden määritelmän perusteella

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})h\mathbf{u} + \|h\mathbf{u}\| \varepsilon(h\mathbf{u}),$$

missä  $\varepsilon(h\mathbf{u}) \rightarrow 0$ , kun  $h\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Lauseen 9 perusteella lineaarikuvauksen  $Df(\mathbf{x})$  matriisi on  $\nabla f(\mathbf{x})$  ja huomautuksen 2 mukaan

$$Df(\mathbf{x})h\mathbf{u} = h\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

Koska lisäksi  $\|h\mathbf{u}\| = |h|$ , saadaan

$$\frac{1}{h} (f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + \frac{|h|}{h} \varepsilon(h\mathbf{u})$$

js väite seuraa suoraan tästä, koska  $\varepsilon(h\mathbf{u}) \rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

Funktiolle  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suunnatun derivaatan geometrinen tulkinta on samankaltainen kuin reaali-funktiolle:  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$  kuvaa funktion  $f$  kasvunopeutta pisteessä  $\mathbf{x}$  vektorin  $\mathbf{u}$  suuntaan, ja tulkinta on sama kun  $\mathbb{R}^2$ :n sijasta on  $\mathbb{R}^n$ , mutta tällöin visuaalinen esitys ei onnistu kuten  $\mathbb{R}^2$ :n tapauksessa. Nimenomaan tämän tulkinnan vuoksi on tärkeää, että suunnatun derivaatan määritelmässä käytetään yksikkövektoria. Käytettäessä muuta kuin yksikkövektoria olisi funktion kasvunopeudessa ”väärä mittakaava”.

Gradientin osoittamalla suunnalla on erikoisasema suunnattujen derivaattojen joukossa, kuten seuraava lause osoittaa.

**Lause 12.** *Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$  ja  $\|\mathbf{u}\| = 1$ . Tällöin  $|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\|$  ja  $|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$  tarkalleen silloin kun  $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}$  jollekin luvulle  $\lambda$ . Tällöin lisäksi  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$  jos  $\lambda > 0$  ja  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|$ , jos  $\lambda < 0$ .*

*Todistus.* Lauseen 11 perusteella

$$|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| = |\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x})\|.$$

Yllä on käytetty Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ . Lauseen jälkimmäinen osa seuraa siitä, että Cauchyn-Schwarzin epäyhtälössä esiintyy yhtäsuuruus tarkalleen silloin kun vektorit ovat lineaarisesti riippuva, sekä analysoimalla tapaukset  $\lambda > 0$  ja  $\lambda < 0$  erikseen.  $\square$

Edellinen lause siis osoittaa, että differentioituva funktio kasvaa jyrkimmin gradientin osoittamassa suunnassa (ja vastaavasti vähenee jyrkimmin gradientin suuntaa vastaan).

**Seuraus 1.** *Jos  $f(x, y, z) = 0$  esittää pintaa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ , on pinnan pisteeseen  $(x, y, z)$  asetettu gradientti  $\nabla f(x, y, z)$  kohtisuorassa pintaa  $f(x, y, z) = 0$  vastaan. Sama tulos pätee myös  $\mathbb{R}^2$ :n käyrille: Jos  $f(x, y) = 0$  esittää avaruuden  $\mathbb{R}^2$  käyrää, on käyrän pisteeseen  $(x, y)$  asetettu gradientti  $\nabla f(x, y)$  kohtisuorassa käyrää vastaan.*

*Todistus.* Todistuksen tekniset yksityiskohdat ovat työläitä, mutta ideaa ei ole vaikea löytää. Mieti miten tämä tulos seuraa siitä, että funktion muutos on nopeinta juuri gradientin suuntaan.

## 1.5 Ketjusääntö

Yhden muuttujan funktioille pätee  $D(g(f(x))) = Dg(f(x))Df(x)$ , ja seuraava lause yleistää tämän usean muuttujan funktioille.

**Lause 13 (Ketjusääntö).** *Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  differentioituvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus  $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  on differentioituva ja*

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x}).$$

*Todistus.* Helppo mutta pitkä, jätetään harjoitustehtäväksi.

**Huomautus 7.** Lineaarialgebran kurssissa todettiin, että jos matriisit  $T$  ja  $S$  esittävät lineaarikuvauksia  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  ovat lineaarikuvauksia, saadaan yhdistetyn kuvauksen  $S \circ T$  matriisi tulona  $ST$ . Jos siis merkitään  $h = (h_1, \dots, h_k) = g \circ f$ , on kuvauksen  $h$  Jacobin matriisi



$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

sama kuin matriisitulo (merkitään  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ )

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\mathbf{y})}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\mathbf{y})}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial g_k(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_k(\mathbf{y})}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

*Huomautus 8.* Edellisestä esimerkistä selviää, että yhdistetyn funktion  $g \circ f = (h_1, \dots, h_k)$   $r$ :nneen komponenttifunktion osittaisderivaatta  $\frac{\partial h_r}{\partial x_s}$  voidaan laskea matriisitulon määritelmän perusteella seuraavasti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_r}{\partial x_s}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_1}{\partial x_s}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_2}{\partial x_s}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial g_r}{\partial y_m}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_m}{\partial x_s}(\mathbf{x}) \\ &= \nabla g_r(f(\mathbf{x})) \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_s}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_s}(\mathbf{x}) \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Jos erityisesti  $k = 1$ , siis  $g$  on funktio  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , on  $h = g \circ f$  funktio  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja tällöin voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_s} = \nabla g(f(\mathbf{x})) \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_s}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_s}(\mathbf{x}) \right), \quad (1.8)$$

siis funktion  $g \circ f$  osittaisderivaatta  $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_s}$  on gradientin  $\nabla g(f(\mathbf{x}))$  ja osittaisderivaatoista muodostetun vektorin

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial x_s}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_s}(\mathbf{x}) \right)$$

sisätulo.

Jos lisäksi  $n = 1$ , on  $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , ja yhdistetty funktio  $h = g \circ f$  reaalfunktio  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ja tällöin 1.8 saa muodon

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x) &= \nabla g(f(x)) \cdot (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_m(x)) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_1} f'_1(x) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_m} f'_m(x) \end{aligned}$$

*Esimerkki 22.* Olkoon  $h(t) = \sin \frac{e^t \ln^2 t}{t^2}$ . Derivaatta  $h'(t)$  laskettaessa voidaan tietysti soveltaa tavanomaista ketjusääntöä tai vaihtoehtoisesti kirjoittaa  $x = e^t$ ,  $y = \ln^2 t$  ja  $z = t^2$  ja laskea yhdistetyn funktion  $h = f \circ g$  derivaatta, missä  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  on määritelty  $g(t) = (e^t, \ln^2 t, t^2)$  ja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x, y, z) = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$  kuten esimerkissä 20. Esimerkissä 20 laskettiin, että

$$\nabla f = \left( \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{y}{z}, \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{x}{z}, -\cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{xy}{z^2} \right),$$

jolloin

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left( \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{y}{z}, \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{x}{z}, -\cos\left(\frac{xy}{z}\right) \cdot \frac{xy}{z^2} \right) \cdot \left( e^t, 2 \ln t \frac{1}{t}, 2t \right) \\ &= \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \left( \frac{y}{z} \cdot e^t + \frac{x}{z} \cdot 2 \ln t \frac{1}{t} - \frac{xy}{z^2} \cdot 2t \right) \\ &= \cos\left(\frac{e^t \ln^2 t}{t^2}\right) \left( \frac{e^t \ln^2 t}{t^2} + \frac{2e^t \ln t}{t^3} - \frac{2e^t \ln^2 t}{t^3} \right) \\ &= \cos\left(\frac{e^t \ln^2 t}{t^2}\right) \frac{e^t \ln t}{t^2} \left( \ln t + \frac{2}{t} - \frac{2 \ln t}{t} \right). \end{aligned}$$

*Esimerkki 23.* Selvitetään, miten osittaisderivaatat  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}$  voidaan määrittää osittaisderivaattojen  $\frac{\partial f}{\partial r}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$  avulla, kun  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  on tavallinen napakoordinaattimuunnos. Lasketaan ensin (1.7):n mukaan

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \theta. \quad (1.9)$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r \cos \theta. \quad (1.10)$$

Näin saadusta yhtälöparista

$$\begin{cases} \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \\ -r \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases}$$

voidaan ratkaista Gaussin menetelmää käyttäen  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}$ :n ja  $\frac{\partial f}{\partial r}$ :n ja  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ :n avulla:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (1.12)$$

*Esimerkki 24.* Jos osittaisderivaatta  $\frac{\partial f}{\partial x} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

voidaan derivoida ”termeittäin”, ts. ”integraalimerkin alta”, kuten Differentiaali- ja integraalilaskennan kursilla todettiin:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

Toisaalta taas analyysin peruslauseen (Differentiaali- ja integraalilaskenta) nojalla tiedetään, että

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

kun  $f$  on jatkuva funktio. Määritetään sitten  $x$ :n suhteen laskettu derivaatta

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t) dt,$$

kun otaksutaan, että  $f(x, t)$  on kummankin muuttujan suhteen jatkuva ja  $x$ :n suhteen derivoituva funktio. Merkitään ensin

$$I(x, g, h) = \int_g^h f(x, t) dt$$

jolloin  $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  riippuu muuttujista  $x$ ,  $g$  ja  $h$ , mutta koska  $g$  ja  $h$  riippuvat  $x$ :stä, riippuu  $I$  viime kädessä pelkästään  $x$ :stä. Derivaatan  $I'(x)$  laskemiseen voidaan soveltaa ketjusääntöä:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I(x, g, h) &= \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \\ &= \int_g^h \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt - f(x, g)g'(x) + f(x, h)h'(x). \end{aligned}$$

Näin saatua yhtälöä

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t) dt = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x)$$

kutsutaan *Leibnizin säännöksi*.

*Esimerkki 25.* Olkoon

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin xt}{t} dt.$$

Leibnizin säännön mukaan

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin xt}{t} dt + \frac{\sin x \cdot x^2}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin x \cdot x}{x} \cdot 1 \\ &= \int_x^{x^2} \cos xt dt + \frac{2 \sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x} \\ &= \int_x^{x^2} \frac{1}{x} \sin xt + \frac{2 \sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x} \\ &= \frac{\sin x^3 - \sin x^2}{x} + \frac{2 \sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x} = \frac{3 \sin x^3 - 2 \sin x^2}{x}. \end{aligned}$$

## 1.6 Funktion ääriarvojen etsiminen

Käsitettä *kompakti joukko* ei tällä kurssilla määritellä täsmällisesti. Tyydytään kuvailemaan, että joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on kompakti, jos se on rajoitettu (kaikilla  $x \in A$   $\|x\| \leq M$ ) ja sisältää reunapisteensä. Esimerkiksi  $\mathbb{R}$ :n väli  $[a, b]$  on kompakti, mutta  $(a, b)$  ei ole.

Jos  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on epätyhjä kompakti joukko ja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio, on  $f$ :llä on joukossa  $A$  sekä maksimi että minimi.

**Lause 14.** *Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ääriarvopisteissä  $\mathbf{a}$  on*

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

*Todistus.* Sivutetaan.

Periaatteessa maksimi ja minimi voidaan siis määrätä 1) etsimällä ne pisteet, joissa  $f$ :n gradientti on nolla tai 2) etsimällä ääriarvot joukon  $A$  reunoilta.

Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  riittävän säännöllisen joukon reunat ovat ”alempiulotteisia” kuin joukko  $A$  ja tällöin ääriarvojen etsiminen reunoilta palautuu toisinaan optimointitehtävään, jossa optimoitava funktio on määritelty avaruudessa, jonka dimensio on pienempi kuin  $n$ .

*Esimerkki 26.* Määritetään funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x$  suurin ja pienin arvo kompaktissa (miksi?) joukossa

$$A = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$$

Jaetaan joukko  $A$  kolmeen osaan:

$$A_1 = \{(x, y) \mid -2 < x < 2, x^2 < y < 4\} \quad (\text{sisäosa}),$$

$$A_2 = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, y = x^2\} \quad (\text{reuna}),$$

$$A_3 = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, y = 4\} \quad (\text{reuna})$$

ja selvitetään aluksi missä  $f$ :n gradientti on nolla.

$$\nabla f(x, y) = (2x - 6, 2y) = (0, 0)$$

ainoastaa, jos  $(x, y) = (3, 0)$ , mutta tämä piste ei kuulu joukkoon  $A$ . Tällöin siis ääriarvot löytyvät joukon reunoilta. Todetaan, että

$$\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_2\} = \{x^2 + x^4 - 6x \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

ja että funktion  $h_1(x) = x^2 + x^4 - 6x$  derivaatan ainoa nollakohta välillä  $[-2, 2]$  on 1. Koska  $h_1(1) = -4$ ,  $h_1(-2) = 32$ ,  $h_1(2) = 18$ , on funktion  $f$  pienin arvo reunalla  $A_2$   $-4$  ja suurin 32. Tarkastellaan sitten reunaa  $A_3$ .

$$\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_3\} = \{x^2 - 6x + 16 \mid -2 \leq x \leq 2\},$$

eikä funktiolla  $h_2(x) = x^2 - 6x + 16$  ole derivaatan nollakohtia välillä  $[-2, 2]$ . Päätepisteissä saatavat arvot ovat  $h_2(-2) = 32$  ja  $h_2(2) = 18$ . Täten funktion  $f$  pienin arvo reunalla  $A_3$  on 18 ja suurin 32.

Kokoamalla näin saadut arvot yhteen voidaan todeta, että funktion  $f$  suurin arvo koko  $A$ :ssa on 32 ja pienin  $-4$ .

Toisinaan voidaan myös päätellä, että funktio saa suurimman ja/tai pienimmän arvonsa joukossa  $A$ , vaikka  $A$  ei olisikaan kompakti. Esim. pienintä arvoa määrättäessä pyritään etsimään jokin kompakti osajoukko  $A_1 \subseteq A$  ja löytämään  $A_1$ :ssä funktion arvo, jota pienempää se ei voi saada  $A_1$ :n ulkopuolelta.

*Esimerkki 27.* Suorakulmaisen särmiön muotoisen kannettoman astian tilavuudeksi halutaan 32. Selvitetään, miten seinien ja pohjan mittasuhteet tulee valita, jotta materiaalin tarve (kokonaispinta-ala) olisi mahdollisimman pieni.

Tätä varten merkitään pituutta, leveyttä ja korkeutta  $x$ :llä,  $y$ :llä ja  $z$ :lla, jolloin astian pinta-ala on  $2xz + 2yz + xy$ . Astian tilavuus on  $xyz = 32$ , joten  $z = \frac{32}{xy}$ , jolloin minimoitavaksi jää funktio  $f(x, y) = 2x \cdot \frac{32}{xy} + 2y \cdot \frac{32}{xy} + xy = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy$ .

Tässä optimointitehtävässä vaatimuksena on  $x > 0$  ja  $y > 0$ , mutta näiden ehtojen määräämä neljännestaso ei ole suljettu eikä rajoitettu joukko, eikä näin ollen siis myöskään kompakti. Ääriarvopisteissä on voimassa

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{64}{x^2} + y, -\frac{64}{y^2} + x\right) = (0, 0),$$

Gradientin nollakohdat löytyvät siis yhtälöparin  $y = \frac{64}{x^2}$ ,  $x = \frac{64}{y^2}$  ratkaisujoukosta. Sijoittamalla  $x$ :n lauseke ensimmäiseen yhtälöön saadaan  $y = \frac{y^4}{64}$ , mistä saadaan  $y^3 = 64$  ja siis  $y = 4$ . Tällöin  $x = \frac{64}{4^2} = 4$  ja  $z = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2$ .

Näin löydettyssä pisteessä  $(x, y) = (4, 4)$  on itse asiassa funktion  $f$  absoluuttinen minimi  $f(4, 4) = 48$  (neljännestasossa  $x > 0$ ,  $y > 0$ ). Tätä voidaan perustella nojautuen geometriseen intuitioon tai seuraavasti:

Joukkoa  $x > 0$ ,  $y > 0$  voidaan rajoittaa siten että lähellä  $x$ - ja  $y$ -akseleita funktio saa varmasti suurempia arvoja kuin 48. Voidaan esimerkiksi todeta, että jos  $0 < x < 1$ , on

$$f(x, y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy \geq \frac{64}{x} \geq 64.$$

vastaavasti jos  $0 < y < 1$ , on myös  $f(x, y) \geq 64$ . Jos taas  $x \geq 1$  ja  $y \geq 64$ , on

$$f(x, y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy \geq xy \geq y \geq 64$$

ja samoin tapauksessa  $y \geq 1$  ja  $x \geq 64$   $f(x, y) \geq 64$ . Tällöin siis kompaktin (miksi) joukon

$$\{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq 64\}$$

joukon reunalla tai sen ulkopuolella funktio saa arvoja, jotka ovat suurempia kuin 64. Koska kompaktissa joukossa jatkuva funktio joka tapauksessa saa minimiarvonsa ja  $f(4, 4) = 48$  on edellisen mukaan ainoa mahdollisuus, täytyy tämän olla funktion  $f$  absoluuttinen minimi koko neljännestasossa  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

*Esimerkki 28.* Olkoon  $a > 1$  ja tarkastellaan pintaa  $z = e^{-x^2 - ay^2}$ . Koska  $x^2 + ay^2 \geq 0$ , on pinnan korkein piste kohdassa  $(x, y) = (0, 0)$ . Selvitetään, missä pinnan pisteissä voidaan valita mahdollisimman jyrkkä laskusuunta. Tätä varten merkitään  $f(x, y) = e^{-x^2 - ay^2}$  ja todetaan, että

$$\nabla f(x, y) = (-2xf(x, y), -2ayf(x, y)).$$

Pisteessä  $(x, y)$  jyrkin nousu tapahtuu gradientin suuntaan (vrt. seuraus 1).

Toisaalta suunnattu derivaatta gradientin suuntaisen yksikkövektorin suuntaan on (kun  $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$ )

$$\nabla f(x, y) \cdot \|\nabla f(x, y)\|^{-1} \nabla f(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|.$$

Määritetään siis missä funktio

$$g(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|^2 = (4x^2 + 4a^2y^2)(e^{-x^2 - ay^2})^2$$

saa suurimman arvonsa. Funktion  $g$  gradientin nollakohtien määrittämiseksi tulee selvittää yhtälöparin

$$\begin{cases} x - 2x^3 - 2a^2xy^2 = 0 \\ a^2y - 2ax^2y - 2a^3y^3 = 0 \end{cases}$$

ratkaisut, jotka ovat  $(0, 0)$ ,  $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2a}})$ ,  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ . Laskemalla todetaan, että  $g(0, 0) = 0$ ,  $g(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}) = \frac{2a}{e}$  ja  $g(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{2}{e}$ .

## 1.7 Sidotut ääriarvot, Lagrangen menetelmä

Useampiulotteisissa tapauksissa joudutaan toisinaan käsittelemään ns. *sidottujen ääriarvojen* määrittämistä. Sidottujen ääriarvojen vastine yhden muuttujan funktioiden teoriassa olisi etsiä ääriarvoja  $x$ -akselin alempiulotteisilta osilta (pisteiltä), mutta tämä on suoraviivainen tehtävä, jos pistejoukko on äärellinen. Toisaalta jo  $\mathbb{R}^2$ :ssa alempiulotteiset osat voivat olla huomattavasti monimuotoisemmat kuin reaaliakselilla, joten sidotuilla ääriarvoilla ei oikeastaan ole mielekäästä vastinetta yhden muuttujan funktioiden teoriassa.

Käytännössä voi esiintyä tilanteita, joissa joukko, josta ääriarvoa etsitään ei ole mikä hyvänsä, vaan hyvinkin selvästi rajoitettu. Näiden ns. sidottujen ääriarvojen käsittelyä varten tarvitaan määritelmä *säännöllisestä pisteestä*.

**Määritelmä 17.** Olkoon  $m < n$  ja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funktio  $g = (g_1, \dots, g_m)$ , jonka jokaisella komponenttifunktiolla  $g_i$  on jatkuvat osittaisderivaatat. Sanotaan, että piste  $\mathbf{x}$  on funktion  $g$  *säännöllinen piste*, mikäli Jacobin matriisiin

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

aste on  $m$ , toisin sanoen mikäli matriisiin (1.13) rivit muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon. Vielä toisella tavalla ilmaistuna, piste  $\mathbf{x}$  on funktion  $g$  säännöllinen piste, mikäli matriisi (1.13) on täysiasteinen. On huomattava, että matriisin täysiasteisuus voidaan aina periaatteessa selvittää Gaussin-Jordanin menetelmällä. Tässä yhteydessä tosin matriisin alkiot eivät ole vakioita.

Tapauksessa  $m = 1$ , jolloin  $g$  on funktio  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , merkitsee pisteen  $\mathbf{x}$  säännöllisyys siis sitä, että  $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ .

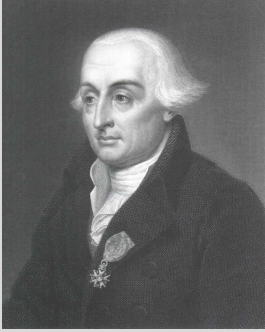
Ääriarvojen etsimisessä voidaan usein käyttää *Lagrangen menetelmää*, joka perustuu seuraavaan lauseeseen.

**Lause 15.** Olkoon  $m < n$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funktioita, joiden osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Jos piste  $\mathbf{a}$  on funktion  $f$  ääriarvo joukossa  $g^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  ja  $\mathbf{a}$  on lisäksi funktion  $g$  säännöllinen piste, niin tällöin on olemassa luvut  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , joille pätee

$$\nabla(f(\mathbf{a}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{a})) = \mathbf{0}.$$

*Todistus.* Vaikea, sivuutetaan suosiolla.

### Taustatietoa



Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) oli italialaissyntyinen matemaatikko ja astronomi. Hän oli yksi 1700-luvun merkittävimmistä tiedemiehistä ja kehitti ns. variaatiolaskentaa, menetelmän ääriarvojen löytämiseen, vakion variointi -menetelmän differentiaaliyhtälöille sekä lukuteoriaa. Hän kehitti myös Newtonin mekaniikkaa ja löysi stabiilit ratkaisut taivannmekaniikassa tunnetulle ns. kolmen kappaleen ongelmalle. Hänen mukaansa on nimetty sijainnit (Lagrangen pisteet), joista yhteen mm. Euroopan avaruusjärjestön Herschel-havaintoasema on lähetetty.

(kuva: Wikimedia Commons)

*Huomautus 9.* Edellisen lauseen lukuja  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  kutsutaan *Lagrangen kertoimiksi*, ja joukosta  $g^{-1}(\mathbf{0})$  löytyviä ääriarvoja *sidotuiksi* ääriarvoiksi. Tällöin kaikkia mahdollisia ääriarvoja rajoittavaa ehtoa  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  kutsutaan *side-ehdoksi*. Ääriarvot löytyvät tällöin niiden pisteiden  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  joukosta, jotka ovat joko  $g$ :n epäsäännöllisiä pisteitä tai jotka joillakin lukujen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  valinnoilla toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} g(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \\ \nabla(f(\mathbf{a}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{a})) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

mikä voidaan yksityiskohtaisemmin kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{a}) = 0 \\ g_2(\mathbf{a}) = 0 \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{a}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f(\mathbf{a}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{a})) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(f(\mathbf{a}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{a})) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(f(\mathbf{a}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{a})) = 0 \end{cases}$$

Yhtälöryhmässä tuntemattomia ovat siis vektorin  $\mathbf{a}$  koordinaatit  $a_1, \dots, a_n$  sekä luvut  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Tuntemattomien määrä  $n + m$  on siis sama kuin yhtälöiden määrä. Optimointitehtävän ratkaisemiseksi ei yleensä kuitenkaan ole tarpeen tietää lukuja  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , joten ne kannattaa pyrkiä eliminoimaan.

*Esimerkki 29.* Funktiolla  $f(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + z^2$  ei ole suurinta arvoa, vaan helposti nähdään, että  $f$  saa miten suurin arvoja tahansa.

Tarkastellaan sitten  $f$ :n arvoja rajoitetussa joukossa. Valitaan side-ehdoiksi yksikköympyrä ja taso  $x + y + z = 1$ , jolloin siis tarkastellaan  $f$ :n ääriarvoja yksikköympyrän ja mainitun tason leikkauksessa. Side-ehdon määrääväksi funktioksi voidaan tällöin valita  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g = (g_1, g_2)$ , missä

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{ja} \\ g_2(x, y, z) &= x + y + z - 1. \end{aligned}$$

Tällä tavoin määritelty joukko on kompakti (miksi?), joten  $f$  saa suurimman ja pienimmän arvonsa tässä joukossa.

Ääriarvot löytyvät siis joko  $g$ :n epäsäännöllisistä pisteiden tai niiden pisteiden joukosta, jotka toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)) = 0, \end{cases}$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ 2z + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Kahdesta viimeisimmästä yhtälöstä seuraa  $2(1 + \lambda_1)(y - z) = 0$ , joten  $y = z$  tai  $\lambda_1 = -1$ . Jälkimmäisessä tapauksessa neljännestä yhtälöstä seuraa  $\lambda_2 = 0$  ja kolmannelta taas  $\lambda_2 = -1$ , mikä on ristiriita. Tällöin siis on oltava  $y = z$ , jolloin kaksi ensimmäistä yhtälöä saavat muodon

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x + 2y = 1, \end{cases}$$

minkä ainoat ratkaisut ovat  $(x, y) = (1, 0)$  ja  $(x, y) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Ainoat pisteet, joissa  $f$ :llä voi olla ehtojen  $g_1(x, y, z) = 0$  ja  $g_2(x, y, z) = 0$  sitoma ääriarvo, ovat siis  $(1, 0, 0)$  ja  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  sekä  $g$ :n epäsäännölliset pisteet. Suoraan laskemalla saadaan  $f(1, 0, 0) = 2$  ja  $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ . Koska tarkasteltava joukko (yksikköpallon pinnan ja tason leikkaus) on kompakti, ovat ääriarvot joka tapauksessa olemassa, joten ne ovat näin löydytyissä pisteissä tai funktion  $g$  epäsäännöllisissä pisteissä.

Selvitetään sitten mahdolliset funktion  $g$  epäsäännölliset pisteet. Funktion  $g$  Jacobin matriisi on

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jonka aste on pienempi kuin kaksi tarkalleen silloin kun  $x = y = z$ . Tällaisia pisteitä ei kuitenkaan ole joukossa, jossa  $g_1(x, y, z) = 0$  ja  $g_2(x, y, z) = 0$ , joten funktion  $f$   $g$ :n sitomiksi ääriarvopisteiksi jäävät löydytyt: maksimi 2 pisteessä  $(1, 0, 0)$  ja minimi  $\frac{2}{3}$  pisteessä  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .





## Luku 2

### Usean muuttujan funktioiden integraalilaskentaa

Riemann-integraalin määritelmä Differentiaali- ja integraalilaskennasta voidaan yleistää melko suoraviivaisesti funktioille  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Muotoa

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

olevaa joukkoa sanotaan avaruuden  $\mathbb{R}^n$  väliksi ja välin  $I$  *geometrisen mittaa* (välin pituuden yleistys  $\mathbb{R}^n$ :ssä) määritellään

$$\mu(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Tällä tavoin määritelty mitta esittää pinta-alaa avaruudessa  $\mathbb{R}^2$  ja tilavuutta avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ .

Kuten reaalfunktioiden tapauksessa, voidaan kukin väli  $[a_i, b_i]$  jakaa osiin (kts. Differentiaali- ja integraalilaskenta). Jos jokaiselle  $i \in \{1, \dots, n\}$   $D_i$  on välin  $[a_i, b_i]$  jako, sanotaan, että  $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$  on välin  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  jako. Jos kussakin jaossa  $D_i$  on  $k_i$  välin  $[a_i, b_i]$  osaväliä, määrää jako  $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$   $k = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  kappaletta välin  $I$  osavälejä  $I_1, \dots, I_k$ , joiden unioni on  $I$ . Merkitään

$$m_i = \inf_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x}) \quad \text{ja} \quad M_i = \sup_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x})$$

Kutakin välin  $I$  jakoa  $D$  kohti määritellään *alasukma*

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \mu(I_i)$$

sekä *yläsumma*

$$\bar{S}_D = \sum_{i=1}^k M_i \cdot \mu(I_i).$$

Samoin kuin reaalfunktioiden kohdalla, voidaan osoittaa, että kaikki alasukmat ovat pienempiä kuin mikä hyvänsä yläsumma ja että jakoa tihennettäessä alasukma ei pienene eikä yläsumma kasva.

**Määritelmä 18.** Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on *Riemann-integroituva* välillä  $I$ , jos

$$\sup_D \underline{S}_D = \inf_D \bar{S}_D,$$

missä  $D$  käy läpi kaikkien välin  $I$  jakojen. Tällöin sanotaan yläsummien infimumia (mikä siis on yhtäsuuri kuin alasukmien supremum) funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  *Riemann-integraaliksi* yli välin  $I$  ja merkitään

$$\int_I f = \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup_D \underline{S}_D = \inf_D \bar{S}_D.$$

Usein joudutaan kuitenkin tarkastelemaan integraalia yli sellaisen joukon  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , joka ei ole väli. Integrointi yli rajoitetun joukon  $A$  joka ei ole väli, käsitellään teoreettisesti määrittelemällä uusi

funktio  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seuraavasti:

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{jos } \mathbf{x} \in A, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

minkä jälkeen funktion  $f$  integraali yli joukon  $A$  määritellään valitsemalla jokin joukon  $A$  sisältävä väli  $I$  ja määrittelemällä

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

Funktioiden  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integraaleille pätee samankaltainen tulos kuin reaalfunktioidenkin:

**Lause 16.** *Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on integroitava yli välin  $I$  tarkalleen silloin kun jokaista positiivilukua  $\varepsilon$  on olemassa Väin  $I$  jako  $D$ , jolle pätee*

$$\bar{S}_D - \underline{S}_D < \varepsilon.$$

*Todistus.* Helppo mutta pitkä, sivuutetaan.

Tunnetusti jatkuvat reaalfunktiot ovat integroituvia, kuin myös funktiot, joilla on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia (Differentiaali- ja integraalilaskenta). Vastaava tulos on voimassa myös usean muuttujan funktioiden reaaliarvoisille funktioille, mutta tällöin joukko, jossa funktion epäjatkuvuuskohtien joukko voi olla monimutkaisempi. Tätä varten määritellään *nollamittaisuuden* käsite. Joukon  $A$  nollamittaisuus tarkoittaa sitä, että  $A$  voidaan peittää  $\mathbb{R}^n$ :n väleillä, joiden yhteenlaskettu mitta saadaan miten pieneksi hyvänsä. Tämä ilmaistaan täsmällisesti seuraavassa määritelmässä.

**Määritelmä 19.** Joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on *nollamittainen* (eli *mitätön* eli *Lebesgue-nollajoukko*), jos jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  on olemassa sellainen jono  $I_1, I_2, I_3, \dots$  avaruuden  $\mathbb{R}^n$  välejä, että

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon.$$

*Esimerkki 30.* Joukko  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on numeroituva, jos on olemassa bijektio  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ , mikä puolestaan merkitsee sitä, että joukon  $A$  alkioita voidaan asettaa (päättymättömään) jonoon:  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots\}$ . Tällöin kutakin pistettä  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  kohti voidaan asettaa väli  $I = [a_1, a_1] \times \dots \times [a_n, a_n]$ , joka sisältää vain pisteen  $\mathbf{a}$  ja jonka mitta on nolla. Näin ollen numeroituva ja myös äärellinen joukko on nollamittainen.

*Esimerkki 31.* Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  suora  $y = x$  on nollamittainen, sillä sen 1. neljännekseen kuuluva osa voidaan peittää väleillä  $I_1 = [0, \varepsilon] \times [0, \varepsilon]$ ,  $I_2 = [\varepsilon, \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}] \times [\varepsilon, \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}]$ ,  $I_3 = [\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3}] \times [\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3}]$ , .... Tällöin välit  $I_n$  todella peittävät koko puolisuoran, sillä  $\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$  tulee miten suureksi tahansa kun  $n$  valitaan sopivasti (harmoninen sarja hajaantuu) olipa  $\varepsilon > 0$  valittu miten hyvänsä. Toisaalta taas  $\mu(I_1) = \varepsilon^2$ ,  $\mu(I_2) = \frac{\varepsilon^2}{2^2}$ ,  $\mu(I_3) = \frac{\varepsilon^2}{3^2}$ , ..., josta välien yhteenlaskettu mitta saadaan laskettua:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{n^2} = \varepsilon^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Näin saatu lauseke saadaan miten pieneksi hyvänsä valitsemalla  $\varepsilon > 0$  riittävän pieneksi.

Edellisen esimerkin nollamittainen joukko on hyvin tyypillinen: Yksiulotteisessa avaruudessa pisteet ovat nollamittaisia, kaksiulotteisessa pisteiden lisäksi suorat, kolmiulotteisessa avaruudessa myös tasot ovat nollamittaisia. Yleisesti ottaen avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  kaikki ”alempiulotteiset” joukot ovat

nollamittaisia. Näiden ”alempiulotteisten” joukkojen ei kuitenkaan tarvitse olla lineaarisia osajoukkoja, vaan myös ”alempiulotteiset pinnat” ovat nollamittaisia. Seuraava lause ilmaisee tämän hieman täsmällisemmin.

**Lause 17.** Olkoon  $m < n$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  ja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentioituva kuvaus, jonka kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Tällöin  $f(U)$  on nollamittainen.

*Todistus.* Sivuutetaan.

*Esimerkki 32.* Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  mikä hyvänsä suora  $\{\mathbf{r} + t\mathbf{s} \mid t \in \mathbb{R}\}$  voidaan esittää reaaliakselin (yksiulotteisen avaruuden)  $\mathbb{R}$  kuvana differentioituvassa kuvauksessa  $f(x) = \mathbf{r} + x\mathbf{s}$  (osittaisderivaatat ovat vakioita ja täten jatkuvia), jolloin suorat ovat nollamittaisia, kun  $n \geq 2$ .

*Esimerkki 33.* suorakaiteen  $[0, 2\pi) \times [0, \pi)$  kuva kuvauksessa

$$f(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$$

on yksikköpallon pinta. Koska kuvauksen  $f$  osittaisderivaatat ovat jatkuvia, on yksikköpallon pinta nollamittainen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  joukko.

**Lause 18 (Lebesgue).** Olkoon  $I$  avaruuden  $\mathbb{R}^n$  kompakti väli ja funktio  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu funktio. Funktio  $f$  on Riemann-integroituva yli välin  $I$  tarkalleen silloin, kun joukko

$$\{\mathbf{x} \in I \mid f \text{ on epäjatkuva } \mathbf{x}: \text{ssä}\}$$

on nollamittainen.

*Todistus.* Sivuutetaan.

### Taustatietoa



Henri Lebesgue (1875–1941) oli ranskalainen matemaatikko, joka väitöskirjatyössään 1902 kehitti hyvin yleisen integraalikäsitteen. Insinöörimatematiikan kursseissa käytetty Riemann-integraali on erikoistapaus Lebesguen integraalista.

(kuva: Wikimedia Commons)

Yksi tärkeä Riemann-integraalin sovelluksista on mitan käsitteen yleistäminen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  välejä yleisemmille joukoille. Tämä merkitsee samalla *tilavuuden* käsitteen yleistämistä.

**Määritelmä 20.** Jos vakiofunktio  $f(\mathbf{x}) = 1$  on integroitava yli avaruuden  $\mathbb{R}^n$  joukon  $A$ , sanotaan, että  $A$  on *Jordan-mitallinen* ja integraalin arvoa kutsutaan joukon  $A$  *Jordan-mitaksi*. Ja merkitään

$$\mu(A) = \int_A d\mathbf{x}.$$

Tapauksessa  $n = 1$  puhutaan *pituudesta*,  $n = 2$  *pinta-alasta* ja tapauksessa  $n = 3$  *tilavuudesta*.

Usean muuttujan funktioiden integraaleille pätee samankaltainen tulos kuin reaalifunktiollekin.

**Lause 19.** Jos  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  on rajoitettu ja  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  ovat integroituvia, on

- $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g,$
- Jos  $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$  kaikilla  $\mathbf{x} \in A$ , niin  $\int_A f \leq \int_A g,$
- Funktio  $|f|$  on integroituva ja  $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$

*Todistus.* Samoin kuin reaalifunktioiden tapauksessa, väitetyt ominaisuudet pätevät äärellisille summille. Ominaisuuksien periytyminen äärellisiltä summilta integraaleille on näytettävissä toteen periaatteessa melko yksinkertaisesti, mutta yksityiskohdat vaativat työtä, joka sivuutetaan.  $\square$

Myös joukko, jonka yli integroidaan, voidaan pilkkoa osiin samoin kuin reaalifunktioiden tapauksessa.

**Lause 20.** Oletetaan, että jossakin avaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukossa määritelty reaaliarvoinen funktio  $f$  on integroituva yli joukkojen  $A_1, \dots, A_k$ , joille  $A_i \cap A_j$  on nollamittainen aina, kun  $i \neq j$ . Tällöin  $f$  on integroituva yli joukon  $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$  ja

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \dots + \int_{A_k} f.$$

*Todistus.* Sivuuetaan.

## 2.1 Iteroidut integraalit

Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integraali lasketaan usein palauttamalla integrointi  $n$ -ulotteisesta avaruudesta matalampiulotteiseen tapaukseen. Tällaista palauttamisprosessia kutsutaan *iteroinniksi*.

Palauttamista varten tarkastellaan vektorin  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  hajotelmaa  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , missä  $\mathbf{x}_1 = (x_1, \dots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$  (ensimmäiset  $n_1$  koordinaattia) ja  $\mathbf{x}_2 = (x_{n_1+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n_2}$  (lopun  $n_2$  koordinaattia) ja  $n = n_1 + n_2$ . Tällöin myös avaruuden  $\mathbb{R}^n$  suljettu väli  $I$  voidaan kirjoittaa muotoon  $I_1 \times I_2$ , missä  $I_1$  on avaruuden  $\mathbb{R}^{n_1}$  ja  $I_2$  avaruuden  $\mathbb{R}^{n_2}$  suljettu väli.

**Lause 21 (Fubini).** Jos  $I = I_1 \times I_2$  kuten yllä ja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integroituva funktio. Jos lisäksi jostaista  $\mathbf{x} \in I_1$  kohti funktio  $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  on integroituva välin  $I_2$  yli, on funktio

$$\mathbf{x} \mapsto \int_{I_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

integroituva yli välin  $I_1$  ja

$$\int_I f = \int_{I_1} \left( \int_{I_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

*Todistus.* Perustuu suoraan Riemann-integraalin määritelmään, jätetään harjoitustehtäväksi. Huomautetaan lisäksi, että edellisessä lauseessa voidaan  $\mathbf{x}$ :n ja  $\mathbf{y}$ :n roolit tietenkin vaihtaa keskenään.  $\square$

Erikoistapauksessa, jossa  $f$  voidaan kirjoittaa muotoon  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y})$ , missä  $f_1$  ei riipu  $\mathbf{y}$ :stä eikä  $f_2$   $\mathbf{x}$ :stä, saadaan tulos, jota myös kutsutaan Fubinin lauseeksi.

**Lause 22.** Olkoot  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  ja  $f$  kuten lauseessa 21. Jos  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y})$ , missä  $f_1$  on integroituva yli välin  $I_1$  ja  $f_2$  yli  $I_2$ , on

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{I_2} f_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Soveltamalla  $n - 1$  kertaa lausetta 21 voidaan integraali  $n$ -ulotteisessa avaruudessa palauttaa yhden muuttujan funktion integroimiseksi, mikäli tarkasteltava funktio on riittävän säännöllinen. Lebesguen lauseen (lause 18) mukaan esimerkiksi jatkuville funktioille voidaan näin tehdä.

*Esimerkki 34.* Jos  $I = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$  ja  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , niin

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 \left/ \int_0^1 \left( \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xz^2 \right) dy dz \right. \\ &= \int_{z=0}^3 \int_{y=0}^2 \left( \frac{1}{3} + y^2 + z^2 \right) dy dz \\ &= \int_0^3 \left/ \int_0^2 \left( \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y^3 + yz^2 \right) dz \right. \\ &= \int_0^3 \left( \frac{10}{3} + 2z^2 \right) dz \\ &= \left/ \int_0^3 \left( \frac{10}{3}z + \frac{2}{3}z^3 \right) dz \right. = 10 + 2 \cdot 9 = 28. \end{aligned}$$

Myös väliä yleisemmän joukon iteroitu integraali voidaan laskea samalla periaatteella. Tällöin on tosin huomattava joukon asettamat rajoitukset integraalien ylä- ja alarajoille. Edellisessä esimerkissä integrointimuuttujien järjestyksen vaihtaminen ei oleellisesti muuta tehtävää helpommaksi toisin kuin monissa muissa tapauksissa.

*Esimerkki 35.* Määritetään sen kappaleen  $A$  tilavuus, jota rajoittavat ehdot  $0 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 2$  sekä  $z \geq 0$  ja  $z = 4 - x - y$ . Tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} &\int_{y=1}^2 \int_{x=0}^1 (4 - x - y) dx dy \\ &= \int_{y=1}^2 \left/ \int_0^1 \left( 4x - \frac{1}{2}x^2 - xy \right) dy \right. \\ &= \int_{y=1}^2 \left( \frac{7}{2} - y \right) dy = \left/ \int_1^2 \left( \frac{7}{2}y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \right. = 2. \end{aligned}$$

*Esimerkki 36.* Lasketaan funktion  $f(x, y) = xy$  integraali yli kolmion, jonka kärkinä ovat pisteet  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  ja  $(1, 1)$ . Kolmio voidaan kattaa, kun  $x$  käy välin  $[0, 1]$  (ulompi integraali) ja  $y$  kutakin  $x$ :n arvoa kohti välin  $[0, x]$  (sisempi integraali). Tällöin saadaan

$$\int_0^1 \int_0^x xy \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{2} x^2 y \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 \, dx = \int_0^1 \frac{1}{8} x^4 = \frac{1}{8}.$$

*Esimerkki 37.* Lasketaan paraboloidin  $z = 4 - x^2 - y^2$  ja tason  $z = 4 - 2x$  rajoittaman joukon  $A$  tilavuus.

Kuvion piirtämisen perusteella selviää, että kysytyn kappaleen sisällä  $x$ -koordinaatti vaihtelee välillä  $[0, 2]$  (uloin integraali). Kutakin  $x$ :n arvoa kohti  $y$ -koordinaatti vaihtelee myös tietyn välin, jonka selvittämiseksi eliminoidaan muuttuja  $z$ : yhtälöistä nimittäin seuraa, että  $4 - x^2 - y^2 = 4 - 2x$ , siis  $y^2 = 2x - x^2$ . Tämä on  $xy$ -tasossa ympyrän yhtälö, keskipisteenä  $(1, 0)$  ja säteenä  $1$ ; tämän ympyrän kautta kulkeva  $z$ -akselin suuntainen sylinteri sisältää paraboloidin ja tason leikkauskäyrän. Tällöin siis kutakin  $x$ :n arvoa kohti  $y$ :n annetaan kulkea väli  $[-\sqrt{2x - x^2}, \sqrt{2x - x^2}]$  (sisempi integraali). Lopuksi  $z$ :n annetaan kulkea tason ja paraboloidin väli  $[4 - 2x, 4 - x^2 - y^2]$ . Kysytty tilavuus saadaan siis integraalista

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{x=0}^2 \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{z=4-2x}^{4-x^2-y^2} dz \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^2 \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (4 - x^2 - y^2 - (4 - 2x)) \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^2 \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2xy - x^2y - \frac{1}{3}y^3) \, dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^2 (2x - x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx. \end{aligned}$$

Näin saatu integraali muuntuu sijoituksella  $t = x - 1$  muotoon

$$\frac{4}{3} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} \, dt,$$

mikä saadaan edelleen sijoituksella  $t = \sin \theta$  muotoon

$$\frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Viimeisimmän integraalin arvo saadaan osittaisintegroimalla useita kertoja tai suoraan kaavakokoelmasta.

## 2.2 Sijoitus integraaliin

Seuraava lause vastaa yhden muuttujan funktion integraaliin sijoittamista.

**Lause 23.** Olkoot  $U$  ja  $V$  ovat rajoitettuja, avoimia avaruuden  $\mathbb{R}^n$  Jordan-mitallisia joukkoja ja  $g : U \rightarrow V$  jatkuva bijektio. Jos lisäksi  $g$ :n osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja kaikissa pisteissä  $\mathbf{x} \in U$  funktion  $g$  Jacobin matriisin

$$Dg(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

determinantti  $\det(J_g(\mathbf{x}))$  (ns. Jacobin determinantti) on nollasta poikkeava, on

$$\int_V f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_U f(g(\mathbf{x})) |\det(J_g(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}.$$

*Todistus.* Vaativa, sivuutetaan.

*Esimerkki 38.* Olkoon  $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  napakoordinaateista  $xy$ -koordinaatteihin välittävä muunnos ja  $U = (0, a) \times (0, 2\pi)$  sekä  $V = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\} \setminus \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\}$ , jolloin  $g : U \rightarrow V$  on bijektio; kumpikin joukoista  $U$  ja  $V$  kuvaa siis origokeskistä  $a$ -säteistä ympyrää, josta on poistettu ei-negatiivisen  $x$ -akselin osuus. Funktion  $g$  Jacobin matriisi on

$$Dg(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

ja tämän determinanti on  $\det(Dg(r, \theta)) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$ . Tämä on nolasta poikkeava koko tarkastelualueella, joten tällöin avaruuden  $\mathbb{R}^2$  jossakin osajoukossa määritellyn jatkuvan reaalifunktion integraali voidaan laskea sijoituksella

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y) dx dy &= \int_U f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

On siis huomattava, että sijoitettaessa napakoordinaattiesitys  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  paitsi integrointialue muuttuu  $V$ :stä  $U$ :ksi,  $dx dy$ :n sijaan kirjoitetaan  $r dr d\theta$ . Tämä on analoginen yhden muuttujan integraaleihin tehtävän sijoituksen  $x = g(t)$  kanssa, jolloin  $dx$ :n sijaan kirjoitetaan  $g'(t) dt$ . Usean muuttujan funktioiden tapauksessa derivaattaa  $g'(t)$  vastaa sijoitusfunktion  $g$  Jacobin matriisin  $J_g(\mathbf{x})$  determinantin itseisarvo  $|\det(J_g(\mathbf{x}))|$ .

*Esimerkki 39.* Pallokoordinaatistosijoitus. Funktion

$$(r, \theta, \phi) \mapsto (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) = (x, y, z)$$

Jacobin matriisi on

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix},$$

jonka determinantiksi saadaan viimeisen rivin mukaan kehittämällä

$$\begin{aligned} &\cos \phi \begin{vmatrix} -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} - r \sin \phi \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos^2 \theta \sin \phi \begin{vmatrix} -\sin \theta & r \cos \theta \\ \cos \theta & r \sin \theta \end{vmatrix} - r^2 \sin^3 \phi \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos^2 \theta \sin \phi (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - r^2 \sin^3 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= -r^2 \sin \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -r^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Kun  $0 \leq \phi \leq \pi$ , saadaan Jacobin matriisin determinantin itseisarvoksi  $r^2 \sin \phi$ . Täten funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  integrointi yli  $R$ -säteisen pallon  $\bar{B}(\mathbf{0}, R)$  voidaan suorittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{B}(\mathbf{0}, R)} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R f(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

*Esimerkki 40.* Lasketaan integraalin  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  arvo. Integrandille  $e^{-x^2}$  ei löydy antiderivaattaa suljetussa muodossa, mutta Fubinin lauseen perusteella (itse asiassa sen yleistyksen perusteella)

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (2.1)$$

Kun tähän tehdään napakoordinaattisijoitus  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , muuttuvat integroimisrajat:  $r : 0 \rightarrow \infty$  ja  $\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , sekä  $dx dy$  korvataan  $r dr d\theta$ :lla ja siis integraali (2.1) muuttuu muotoon (huomaa että napakoordinaatistossa  $x^2 + y^2 = r^2$ )

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Tällöin nimittäin integrandiksi on saatu  $e^{-r^2} r$ , minkä antiderivaatta  $r$ :n suhteen on helppo löytää, koska  $\frac{d}{dr} e^{-r^2} = -2re^{-r^2}$ . Sisempi integraali saadaan tämän perusteella lasketuksi:

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = - \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-r^2} = \frac{1}{2}.$$

Tällöin

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Koska  $I^2 = \frac{\pi}{4}$  ja integrandi  $e^{-x^2}$  on koko reaaliakselilla positiivinen, on myös integraalin arvon oltava positiivinen. Täten  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

*Esimerkki 41.* Selvitä harjoitustehtävänä, miten integraalin

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

arvosta voidaan selvittää  $\Gamma(\frac{1}{2})$ .

*Esimerkki 42.* Määritetään sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat yksikköpallo  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ja sylinteri  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ . Vaihdettaessa napakoordinaatistoon saadaan pallon yhtälöksi  $r^2 + z^2 = 4$  ja sylinterin yhtälöksi  $r = 2 \sin \theta$ . Kokonaistilavuus on neljä kertaa sen osan tilavuus, jota lisäksi rajoittavat ehdot  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ . Tällöin tilavuus on siis

$$\begin{aligned} & 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2 \sin \theta} \int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} dz r dr d\theta \\ &= 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2 \sin \theta} \sqrt{4-r^2} r dr d\theta \end{aligned}$$

Näin saatuun integraaliin sijoitus  $u = 4 - r^2$  antaa

$$2 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{u=4 \cos^2 \theta}^4 \sqrt{u} du d\theta = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8 \cos^3 \theta) d\theta,$$

johon sijoittamalla  $v = \sin \theta$  saadaan

$$\frac{16}{3} \pi - \frac{32}{3} \int_0^1 (1 - v^2) dv = \frac{16}{3} \pi - \frac{64}{9}.$$

*Esimerkki 43.* Funktioiden  $f$  ja  $g$  Laplace-muunnokset ovat

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad \text{ja} \quad G(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt.$$

Näiden tulo voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx \int_0^\infty g(y) e^{-sy} dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) g(y) e^{-s(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$



Tason  $\mathbb{R}^2$  ensimmäinen neljännes voidaan käydä läpi kuten ylläolevassa integraalissa: Kutakin  $x$ :n arvoa  $x \in [0, \infty)$  kohti  $y$  käy läpi puolisuoran  $[0, \infty)$ . Tason 1. neljännes voidaan käydä läpi myös siten, että kutakin suoran  $y = x$  pistettä  $(u, u)$  kohti kuljetaan tätä suoraa vastaan kohtisuorassa oleva jana  $y = -x + 2u$  pisteestä  $(2u, 0)$  pisteeseen  $(0, 2u)$ . Tätä vastaa sijoitus  $x = u + v$  ja  $y = u - v$  (jolloin  $u = \frac{1}{2}(x + y)$  ja  $v = \frac{1}{2}(x - y)$ ) ja Jacobin matriisin determinantiksi saadaan

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Tällöin integraali saadaan muotoon

$$\int_{u=0}^{\infty} \int_{v=-u}^u f(u+v)g(u-v)e^{-s \cdot 2u} 2 dv du,$$

joka sisempään integraaliin sijoittamalla  $v = w - u$  muuttuu muotoon

$$\int_{u=0}^{\infty} \int_{w=0}^{2u} f(w)g(2u-w)e^{-s \cdot 2u} 2 dw du.$$

Kun vielä ulompaan integraaliin tehdään sijoitus  $u = \frac{1}{2}t$ , saadaan integraali muotoon

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{w=0}^t f(w)g(t-w) dw e^{-st} dt.$$

Näin saatu integraali voidaan tulkita funktion

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(w)g(t-w) dw$$

Laplace-muunnokseksi.

## 2.3 Vektorianalyysiä

Vektorianalyysillä tarkoitetaan differentiaali- ja integraalilaskennan soveltamista vektoriarvoisiin funktioihin ja oikeastaan vektorianalyysistä on nähty jo esimerkkejä aiemminkin mm. gradienteista ja suunnatuista derivaatoista puhuttaessa. Vektorianalyysissä käytetään sekä differentiaali- ja integraalilaskennan että lineaarialgebran käsitteistöä. Perinteinen vektorianalyysi keskittyy kuitenkin lähinnä kolmiulotteisen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  ominaisuuksiin.

### 2.3.1 Vektoriarvoisen funktion derivointi

Ajan suhteen muuttuva vektori voidaan mallintaa kuvauksella  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , jolloin siis  $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \in \mathbb{R}^3$  on tarkasteltava vektori ajanhetkellä  $t$ . Aiemmin on todettu, että mikäli komponenttifunktiot  $f_1, f_2, f_3$ , ovat jatkuvia, on funktiolla  $f$  selkeä geometrinen merkitys: kun  $t$  käy läpi jonkin reaali-lukuvälin, piirtää  $\mathbf{f}(t)$  avaruuteen  $\mathbb{R}^3$  käyrän. Jos lisäksi komponenttifunktiot ovat derivoituvia, sanotaan, että funktion  $f$  määräämä käyrä on *sileä*. Tässä luvussa tarkastellaan yleensä tilanteita, joissa lisäksi komponenttifunktioiden derivaatat ovat jatkuvia, jolloin sanotaan, että funktion  $f$  määräämä käyrä on *jatkovasti derivoituva*.

Hieman yleisemmin voidaan tarkastella vektoriarvoista funktiota  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jonka Jacobin matriisi on helppo määrittää: Kyseessä on  $n \times 1$ -matriisi (pystyvektori)  $(f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t))^T$ . Tällöin funktion  $f$  Fréchet'n derivaatta pisteessä  $t$  on lineaarikuvaus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joka kuvaa luvun  $h$  vektoriksi

$$(f'_1(t)h, f'_2(t)h, \dots, f'_n(t)h),$$

josta käytetään merkintää  $h\mathbf{f}'(t)$ . Kyseinen lineaarikuvaus on siis avaruuden  $\mathbb{R}^n$  origon kautta kulkeva suora, jonka suuntavektori on  $\mathbf{f}'(t)$ . Koska

$$\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t) = h\mathbf{f}'(t) + |h|\varepsilon(h),$$

voidaan todeta että suora  $\mathbf{f}(t) + h\mathbf{f}'(t)$  on funktion  $f$  paras mahdollinen lineaarinen approksimaatio pisteessä  $t$ . Suoraa

$$\mathbf{r} + h\mathbf{s}, \quad h \in \mathbb{R}$$

missä paikkavektori  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$  ja suuntavektori  $\mathbf{s} = \mathbf{f}'(t)$  kutsutaankin funktion  $f$  määräämän käyrän *tangentiksi* pisteessä  $t$ . Vektoriarvoisen funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivointi komponentteittain tuottaa siis  $f$ :n piirtämän käyrän tangentin suuntavektorin.

### 2.3.2 Vektorifunktion käyräintegraali

Klassisessa mekaniikassa työn käsite ymmärretään tulona  $Fs$ , missä  $s$  merkitsee matkaa, jonka kappale on siirtynyt voiman  $F$  vaikutuksesta voiman  $F$  suuntaan. Jos kuitenkin voima  $F$  ja sen suunta vaihtelee kappaleen siirron ajan, pitää mekaanisen työn käsite määritellä laajemmin.

Yksinkertaisessa tapauksessa, jossa voima ei vaihtele ajan mukana, pitäisi mekaanisen työn lausekkeen olla muotoa  $\|\mathbf{F}_s\| \cdot \|\mathbf{s}\|$ , missä  $\mathbf{F}_s$  merkitsee voiman  $\mathbf{F}$  komponenttia liikesuunnassa  $\mathbf{s}$ .

Komponentin  $\mathbf{F}_s$  suuruus projektiona on selvitetty aiemmin (Lineaarialgebra)

$$\mathbf{F}_s = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^2} \mathbf{s},$$

missä  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$  tarkoittaa vektoreiden pistetuloa. Tällöin

$$\|\mathbf{F}_s\| = \frac{|\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}|}{\|\mathbf{s}\|^2} \|\mathbf{s}\|,$$

mistä nähdään, että

$$\|\mathbf{F}_s\| \|\mathbf{s}\| = |\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}|. \quad (2.2)$$

jos halutaan sisällyttää työn määritelmään mukaan myös suunta, voidaan itseisarvomerkki poistaa lausekkeesta (2.2) ja todeta, että mikäli voima  $\mathbf{F}$  siirtää kappaletta vektorin  $\mathbf{s}$  verran, on tehty työ  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ .

Yleistettäessä mekaanisen työn käsitettä tapaukseen, jossa kappaleen kulkusuunta ja voiman suuruus vaihtelee otetaan myös mukaan seuraavat apukäsitteet: Kuvataan käyrää, jota pitkin kappale kulkee funktiolla  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , jolloin siis  $\gamma(t)$  on kappaleen paikka ajanhetkellä  $t$ . Lisäksi kuvataan kappaleeseen vaikuttavaa voimaa funktiolla  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , jolloin voimaa pisteessä  $\gamma(t)$  on  $\mathbf{F}(\gamma(t))$ .

Käyrän  $\gamma$  tangentin suuntavektori pisteessä  $t$  on  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))$  mikä siis on voiman vaikutussuunta. Jos  $\gamma$  on riittävän säännöllinen (esim  $\gamma'$  jatkuva), pysyy  $\gamma'(t)$  lyhyellä aikavälillä  $[t, t+dt]$  likimain samana ja tällöin kappaleen voidaan katsoa siirtyvän likimain matkan  $\gamma'(t)dt$ . Tällöin voiman  $\mathbf{F}$  lyhyellä aikavälillä  $[t, t+dt]$  tekemää työtä approksimoi lauseke

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) dt + F_2(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt + F_3(\gamma(t))\gamma'_3(t) dt, \quad (2.3)$$

ja lausekkeen (2.3) integointi yli tarkasteluvälin antaa

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (2.4)$$

Integraali (2.4) kuvaa siis muuttuvan voiman  $\mathbf{F}$  tekemää työtä, kun kappale siirtyy käyrää  $\gamma$  pitkin pisteestä  $\gamma(t_1)$  pisteeseen  $\gamma(t_2)$ .

Integraalille (2.4) on aivan oma merkintätapansa ja nimi:

**Määritelmä 21 (Vektorifunktion käyräintegraali).** Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sileä käyrä ja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Tällöin funktion  $f$  käyräintegraalista pitkin käyrää  $\gamma$  käytetään merkintää

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Käyräintegraalin määrittelevässä lausekkeessa  $\mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  on muodoltaan samanlainen kuin määrättyyn integraaliin sijoitus, mikä antaa muistisäännön käyräintegraalin laskemiseksi.

*Esimerkki 44.* Olkoon  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  käyrä  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$  ja  $f(x, y) = (x^2 + y, x + y^3)$ . Lasketaan funktion  $f$  käyräintegraali käyrää  $\gamma$  pitkin.

Koska käyrällä  $\gamma$  on  $x = x(t) = t^2$ , on käyrällä  $dx = 2t dt$  ja samoin  $y = y(t) = t^3$  sekä  $dy = 3t^2 dt$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\gamma} (x^2 + y) dx + (x + y^3) dy \\ &= \int_{-1}^1 ((t^2)^2 + t^3) \cdot 2t dt + (t^2 + (t^3)^3) \cdot 3t^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 (3t^{11} + 2t^5 + 5t^4) dt = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{4}t^{12} + \frac{1}{3}t^6 + t^5 \right) dt = 2 \end{aligned}$$

*Esimerkki 45.* Olkoon  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , jolloin  $\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi)$ , siis  $\gamma$  on sulkeutuva käyrä (origokeskinen yksikköympyrä). Tällöin

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Käyräintegraalin määritelmästä seuraa melko suoraan seuraava lause:

**Lause 24.** Käyräintegraaleille pätee

1. Jos käyrän  $\gamma_1$  päätepiste on sama kuin käyrän  $\gamma_2$  alkupiste, ja yhdistettyä käyrää  $\gamma_1 \gamma_2$  merkitään  $\gamma$ :lla, on

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$$

2. Merkitään  $-\gamma$ :lla käyrää, joka saadaan kulkemalla  $\gamma$  lopusta alkuun. Tällöin

$$\int_{-\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

3.

$$\int_{\gamma} (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \beta \int_{\gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}$$

Jatkossa otaksutaan, että  $U$  on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  käyräyhtenäisen joukko, ts. sellainen joukko jonka mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää joukkoon  $U$  sisältyvällä käyrällä.

**Määritelmä 22.** Olkoon  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Vektorianalyysissä funktiota  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  kutsutaan *vektorikentäksi*. Jos on olemassa funktio  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  jolle pätee  $f = \nabla V$  joukossa  $U$ , sanotaan, että  $V$  on vektorikentän  $f$  *potentiaali*. Tällöin sanotaan myös, että *differentialimuoto*  $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  on *eksakti* ja että sen *integraalifunktio* (joukossa  $U$ ) on  $V$ .

**Lause 25.** Oletetaan, että  $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  on eksakti alueessa  $U$  ja että  $f = \nabla V$ . Jos  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  on alueeseen  $U$  sisältyvä sileä käyrä jonka derivaatta on jatkuva ja jolle  $\gamma(a) = \mathbf{a}$  ja  $\gamma(b) = \mathbf{b}$ , on

$$\int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}). \quad (2.5)$$

*Todistus.* Oletus  $f = \nabla V$  merkitsee sitä, että  $f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_i}$ . Tällöin

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
& = \int_a^b \nabla V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (V \circ \gamma)'(t) dt \\
& = \int_a^b (V \circ \gamma)'(t) dt = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

**Huomautus 10.** Edellinen lause sanoo, että mikäli vektorikentällä on alueessa  $U$  potentiaali (jolloin sanotaan myös, että vektorikenttä on *konservatiivinen*), riippuu käyräintegraalin arvo vain käyrän päätepisteistä, eikä käyrästä itsestään. Esimerkiksi Newtonin mekaniikassa maan gravitaation määräämä voimakenttä on konservatiivinen.

**Huomautus 11.** Huomaa yhtäläisyys kaavan (2.5) ja Newton-Leibnizin säännön

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

missä  $F'(t) = f(t)$  välillä. Molemmat kaavat ovat itse asiassa erikoistapauksia ns. abstraktista Stokesin lauseesta, jonka erikoistapauksia on vektorianalyyseissä lukuisia muitakin.

Jos vektorikentän  $f = (f_1, \dots, f_n)$  potentiaalin  $V$  toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, on  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ . Tietyin edellytyksin ehto  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  kaikille  $i, j$  on myös *riittävä* potentiaaliolemassaololle.

Sanotaan, että alue  $U$  on *tähtimäinen*, jos alueessa  $U$  on piste  $\mathbf{p}$ , josta voidaan piirtää alueeseen  $U$  sisältyvä jana mihin tahansa  $U$ :n pisteeseen. On mahdollista todistaa seuraava lause:

**Lause 26.** Jos  $U$  on  $\mathbb{R}^n$ :n tähtimäinen alue ja  $f = (f_1, \dots, f_n)$  vektorikenttä, jonka osittaisderivaatat ovat jatkuvia alueessa  $U$ . Jos  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  kaikille  $i, j$ , niin  $f$ :llä on potentiaali  $U$ :ssa.

*Todistus.* Sivutetaan.

**Esimerkki 46.** Selvitä, miksi esimerkin 45 funktiolla ei ole potentiaalia tarkastelualueessa.

**Esimerkki 47.** Selvitetään, onko vektorikentällä  $f(x, y) = (f_1, f_2) = (2x + 3y, 3x + 4y)$  potentiaalia  $\mathbb{R}^2$ :n jossakin alueessa. Todetaan ensiksi, että  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3 = \frac{\partial f_2}{\partial x}$  ja että  $\mathbb{R}^2$  on tähtimäinen alue. Näin ollen vektorikentällä on  $\mathbb{R}^2$ :ssa potentiaali  $V(x, y)$ , ja tämän määrittämiseksi ratkaistaan osittaisdifferentiaaliyhtälöt  $\frac{\partial V}{\partial x} = f_1$  ja  $\frac{\partial V}{\partial y} = f_2$ . Osittaisdifferentiaaliyhtälöstä

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + 3y$$

seuraa, että  $V(x, y) = x^2 + 3xy + h(y)$ , missä  $h(y)$  on vain  $y$ :stä riippuva funktio. Derivoimalla näin saatu lauseke  $y$ :n suhteen todetaan, että

$$3x + 4y = \frac{\partial V}{\partial y} = 3x + h'(y),$$

joten  $h'(y) = 4y$ , mistä  $h(y) = 2y^2 + C$ . Täten potentiaali on

$$V(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + C,$$

missä  $C$  on vakio.

**Esimerkki 48.** Laskettaessa edellisen tehtävän vektorikentän käyräintegraalia  $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  yli käyrän, joka alkaa pisteestä  $(0, 0)$  ja päättyy pisteeseen  $(2, 1)$  ei käyrää tarvitse määritellä erikseen: potentiaaliolemassaolosta seuraa, että käyräintegraalin arvo riippuu vain päätepisteistä ja

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = V(2, 1) - V(0, 0) = 12 + C - C = 12.$$

### 2.3.3 Skalaarifunktion käyräintegraali

Edellä on puhuttu vain vektoriarvoisen funktion käyräintegraaleista, kun myös skalaariarvoisen funktion käyräintegraali on mahdollista määrittellä luontevasti. Tarkastellaan aluksi käyräintegraalin määrittelevää lauseketta

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

ja merkitään

$$\mathbf{T} = \|\gamma'(t)\|^{-1} \gamma'(t),$$

jolloin  $\mathbf{T}$  on käyrän suuntainen ykkösen pituinen tangenttivektori. Jos lisäksi merkitään  $\|\gamma'(t)\| dt = ds$ , voidaan käyräintegraali kirjoittaa muotoon

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Koska  $\mathbf{T}$  on yksikkövektori, merkitsee yllä oleva lauseke sitä, että vektorifunktion käyräintegraalissa itse asiassa integroidaan vektorifunktion  $\mathbf{f}$  käyrän tangentin suuntaisen komponentin skalaarikerrointa ja lisäksi mukaan on otettu painokerroin  $\|\gamma'(t)\|$ .

**Määritelmä 23.** Skalaariarvoisen funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  käyräintegraali käyrän  $\gamma$  yli määritellään lausekkeella

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt,$$

missä  $\gamma(a)$  on käyrän alkupiste ja  $\gamma(b)$  sen päätepiste.

Tässä yhteydessä ei käsitellä skalaariarvoisten funktioiden käyräintegraaleja sen tarkemmin, vaan todetaan, että skalaarifunktion  $f = 1$  käyräintegraali tuottaa lausekkeen

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

joka on täsmälleen sama kuin aiemmin saatu lauseke käyrän pituudelle (Differensiaalilaskenta).

### 2.3.4 Pinta-ala

Pinta avaruudessa  $\mathbb{R}^3$  on tason  $\mathbb{R}^2$  alueen  $A$  kuva jatkuvassa kuvauksessa  $r : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  (tarkemmin sanoen kyseessä on pinnan parametriesitys). Pinta on *sileä*, mikäli  $f$  on differentioituva. Tässä yhteydessä tarkastellaan lähinnä sellaisia pintoja  $r : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , missä  $r$ :n osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

*Esimerkki 49.* Suorakaide  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  kuvautuu  $R$ -säteiseksi, origokeskisen pallon pinnaksi kuvauksessa  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi)$ .

*Esimerkki 50.* Yhtälön  $z = f(u, v)$  määrittämälle pinnalle saadaan parametriesitys  $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$ .

*Esimerkki 51.* Ellipsoidin  $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$  puolikkaalle  $z \geq 0$  saadaan  $z = c \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2}$  ja tästä edelleen parametriesitys

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, c \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2}).$$

*Esimerkki 52.* Edellisen esimerkin ellipsoidille saadaan myös parametriesitys  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, b \sin \theta \sin \phi, c \cos \phi)$  ( $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ ).

Selvitetään aluksi, miten pinnan  $\{r(u, v) \mid (u, v) \in A\}$  ala määrätään. Tätä varten huomataan että koska  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$  (Lineaarialgebra), missä  $\theta$  on vektoreiden  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  välinen kulma, merkitsee  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$  vektoreiden  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  määrittämän suunnikkaan pinta-alaa. Funktion  $r$  Jacobin matriisi on

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \\ \frac{\partial r_3}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{pmatrix},$$

joten funktion  $r$  Fréchet'n derivaatta pisteessä on kuvaus

$$(h_1, h_2) \mapsto h_1 \mathbf{s}_1 + h_2 \mathbf{s}_2,$$

missä

$$\mathbf{s}_1 = \left( \frac{\partial r_1}{\partial u}, \frac{\partial r_2}{\partial u}, \frac{\partial r_3}{\partial u} \right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{s}_2 = \left( \frac{\partial r_1}{\partial v}, \frac{\partial r_2}{\partial v}, \frac{\partial r_3}{\partial v} \right)$$

ovat pinnan tangenttitason suuntavektorit pisteessä  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ .

*Huomautus 12.* Tason  $z = f(x, y)$  parametriesityksessä  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  saadaan tangenttitason suuntavektoreiksi

$$\mathbf{s}_1 = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{s}_2 = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

ja paikkavektoriksi  $(u_0, v_0, z_0)$ , missä  $z_0 = f(u_0, v_0)$ . Selvitä miten tästä saadaan huomautuksessa 1.6 mainittu muoto.

Mikäli muutosvektori  $(du, dv)$  on pieni, siirryttäessä pisteestä  $(u, v)$  pisteeseen  $(u + du, v + dv)$  arvioi funktion  $r$  muutosta  $\mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u, v)$  varsin hyvin lauseke  $du \mathbf{s}_1 + dv \mathbf{s}_2$  ( $\mathbf{s}_1$  ja  $\mathbf{s}_2$  ovat kuten edellä) ja suorakaide  $[u, u + du] \times [v, v + dv]$  kuvautuu siis likimain suorakaiteeksi, jonka sivuina ovat vektorit  $\mathbf{s}_1 du$  ja  $\mathbf{s}_2 dv$ . Tämän suorakaiteen pinta-ala on  $\|\mathbf{s}_1 du \times \mathbf{s}_2 dv\|$ , mikä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\left\| \left( \frac{\partial r_1}{\partial u}, \frac{\partial r_2}{\partial u}, \frac{\partial r_3}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial r_1}{\partial v}, \frac{\partial r_2}{\partial v}, \frac{\partial r_3}{\partial v} \right) \right\| du dv = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

näin ollen pinnan  $\{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in A\}$  alaa esittää integraali

$$\iint_{(u,v) \in A} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

*Huomautus 13.* Jos pinta on annettu muodossa  $z = f(x, y)$ , voidaan parametriesitykselle  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  laskea suoraan (miten?)

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1}.$$

*Esimerkki 53.* Määritetään sen pinnan ala, jonka sylinteri  $x^2 + y^2 - y = 0$  leikkaa yksikköpalloa  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ylempää puolikkaasta ( $z > 0$ ). Sylinterin yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon  $x^2 + y^2 - 2\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \iff x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$ , jolloin siis sylinterin ja  $xy$ -tason leikkaus on  $\frac{1}{2}$ -säteinen ympyrä  $A$ , jonka keskipiste on  $(0, \frac{1}{2})$ . Tarkasteltavaa pintaa esittää siis funktio  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , missä  $x$  ja  $y$  kulkevat yli ympyrän  $A$ .

Näillä valinnoilla  $\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$ , jolloin

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1} = \frac{1}{1 - u^2 - v^2}.$$

kysytty pinta-ala on siis

$$A = \iint_{(u,v) \in A} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} du dv. \quad (2.6)$$

Symmetrian nojalla voidaan integroida yli ensimmäisen neljänneksen ja siis

$$A = 2 \int_{v=0}^1 \int_{u=0}^{\sqrt{u-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} du dv. \quad (2.7)$$

Integraali (2.7) puolestaan voidaan määrittää napakoordinaattimuunnoksella: Kun  $u = r \cos \theta$  ja  $v = r \sin \theta$ , on sen puoliympyrän, jonka yli integroidaan, reunan yhtälö  $r = \sin \theta$  (miksi?). Tällöin

integraali (2.7) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin \theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin \theta} (-\sqrt{1-r^2}) d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{1-\sin^2 \theta} - 1) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\theta - \sin \theta) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2. \end{aligned}$$

*Huomautus 14.* Lausekkeelle  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|$  on mahdollista löytää myös esitysasu, joka on käyttökelpoinen, vaikka parametriesitystä  $\mathbf{r}(u, v)$  ei olisikaan mahdollista ratkaista  $u$ :n ja  $v$ :n lausekkeena. Saattaa nimittäin olla, että kolmen muuttujan funktio  $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ja yhtälö  $G(u, v, w) = 0$  määrittelevät funktion  $w = f(u, v)$ , vaikka  $f$ :n lausekkeen löytäminen olisikin toivotonta.

Tällöin itse asiassa saadaan funktio  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  yhdistämällä kuvaukset  $(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)) \mapsto G(u, v, f(u, v))$ . Ehdon  $G(u, v, f(u, v)) = 0$  toteutuessa on kyseinen funktio vakio ja siksi myös sen Fréchet'n derivaatta on nollafunktio. Fréchet'n derivaatta voidaan laskea ketjusäännön avulla: Ulkofunktion derivaatta  $(\nabla G = (\frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial w}))$  arvolla sisäfunktion  $(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$  derivaatta. Matriisiesitys yhdistetyn funktion derivaatalle on siis  $1 \times 2$ -matriisi

$$\left( \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial w} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial v} \right),$$

ja koska näin saatu lineaarikuvaus on nollakuvaus, voidaan todeta, että

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial G}{\partial w}} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial v}}{\frac{\partial G}{\partial w}}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1 &= \left( \frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial G}{\partial w}} \right)^2 + \left( \frac{\frac{\partial G}{\partial v}}{\frac{\partial G}{\partial w}} \right)^2 + \left( \frac{\frac{\partial G}{\partial w}}{\frac{\partial G}{\partial w}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\left( \frac{\partial G}{\partial w} \right)^2} \left( \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial w} \right)^2 \right) = \frac{1}{\left( \frac{\partial G}{\partial w} \right)^2} \|\nabla G\|^2 \end{aligned}$$

ja

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1} = \frac{1}{\left| \frac{\partial G}{\partial w} \right|} \|\nabla G\|.$$

Sovellettaessa näin saatua esitystä esimerkkiin 53 voidaan valita  $G(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2 - 1$  ja tästä saadaan  $\frac{\partial G}{\partial w} = 2w$  sekä  $\|\nabla G\| = \|(2u, 2v, 2w)\| = 2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 2$ , jolloin siis

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \frac{1}{w} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

### 2.3.5 Skalaarifunktion pintaintegraali

**Määritelmä 24.** Olkoon  $U$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  alue ja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  reaaliarvoinen funktio ja  $S = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in A\}$  pinta avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Tällöin integraalia

$$\iint_{(u,v) \in A} f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

sanotaan funktion  $f$  integraaliksi yli pinnan  $S$ .

Edellisen luvun perusteella lauseke  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|$  toimii kertoimena, jolla kerrottuna saadaan  $uv$ -tason  $du \cdot dv$ -alaisen suorakulmion alasta tämän yläpuolella tai (alapuolella) olevan pinnan  $S$  tangentitasolla olevan suunnikkaan ala ja fysiikan oppikirjoissa onkin tapana merkitä  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = dA$ , jolloin pintaintegraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\iint_{(u,v) \in A} f(\mathbf{r}(u,v)) dA.$$

*Esimerkki 54.* Etäisyydellä  $r$  pyörimisakselista olevan pistemäisen massan hitausmomentti on  $mr^2$ . Yleisesti kappaleen hitausmomentti selvitetään jakamalla kappale pieniin pistemäisiin massoihin ja laskemalla yhteen osien hitausmomentit. Jakoa tihentämällä päädytään integrointitehtävään. Selvitetään  $R$ -säteisen ohuen pallonkuoren hitausmomentti (pyörimisakselina  $z$ -akseli), kun pallonkuoren pintatiheys on  $\rho$  ( $\text{kg/m}^3$ ).

Pallonkuoren  $S$  parametriesitykseksi voidaan valita

$$\mathbf{r}(u,v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v),$$

missä  $u \in [0, 2\pi]$  ja  $v \in [0, \pi]$ . Tällöin  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (-R \sin u \sin v, R \cos u \sin v, 0)$  ja  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, -R \sin v)$ . Suoralla laskulla saadaan

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = |R^2 \sin v| = R^2 \sin v,$$

kun  $v \in [0, \pi]$ . Pallon pinnan pisteen  $(x, y, z)$  etäisyyden neliö pyörimisakselista ( $z$ -akseli) on

$$r^2 = \|(x, y, z) - (0, 0, z)\|^2 = x^2 + y^2,$$

joten kysytyn hitausmomentin lausekkeeksi saadaan

$$J = \int_S \rho(x^2 + y^2) dA.$$

Edellä on jo selvitetty lauseke  $dA$ :lle ja parametriesitys pinnalle, joten integraali voidaan laskea suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned} J &= \rho \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi} (R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v) R^2 \sin v dv, du \\ &= \rho R^4 \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi} \sin^3 v dv du = \rho R^4 \cdot 2\pi \int_{v=0}^{\pi} \sin^3 v dv = \rho R^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Jälkimmäisin integraali voidaan laskea osittaisintegroinnilla. Täten

$$J = \frac{8\pi}{3} \rho R^4 = \frac{2}{3} R^2 \cdot 4\pi R^2 \rho = \frac{2}{3} R^2 m,$$

missä  $m = 4\pi R^2 \rho$  on pallonkuoren massa (ala kertaa pintatiheys).

### 2.3.6 Vektorikentän pintaintegraali

**Määritelmä 25.** Jos  $f$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  alueessa  $U$  määritelty vektorikenttä (siis funktio  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) ja  $S = \{\mathbf{r}(u,v) \mid (u,v) \in A\}$  pinta  $\mathbb{R}^3$ :ssa, on

$$\iint_{(u,v) \in A} \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv$$

vektorikentän  $f$  pintaintegraali yli pinnan  $S$ .

Merkitään lisäksi

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}(u,v)) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},$$



jolloin  $\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v))$  on siis pisteessä  $\mathbf{r}(u, v)$  pintaa vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori. Näillä merkinnöillä pintaintegraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\iint_{(u,v) \in A} \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) dA, \quad (2.8)$$

jolloin siis vektorikentän pintaintegraalissa itse asiassa on kyseessä vektoriarvoisen funktion pintaa vastaan kohtisuoran komponentin (skalaari) integrointi yli pinnan.

Tutkittaessa virtausilmiöitä annetun pinnan läpi (esim. nesteen virtaus, magneettivuo, jne.) katsotaan normaalivektorin suuntainen virtaus positiiviseksi ja sille vastakkainen suunta negatiiviseksi. Tämä tietysti edellyttää, että pinta on kaksipuolinen (esim. ns. Möbiuksen nauha on yksipuolinen pinta), jolloin voidaan sopia kumpaa puolta pidetään ”sisäpuolena” ja kumpaa ”ulkopuolena. Integraalia (2.8) kutsutaankin nimellä *vektorikentän  $\mathbf{f}$  vuo pinnan  $S$  läpi*.

*Esimerkki 55.* Olkoon  $T(x, y, z)$  lämpötila pisteessä  $(x, y, z) \in W$ , missä  $W$  on  $\mathbb{R}^3$ :n alue. Termodynamiikan mukaan lämpö siirtyy korkeammasta lämpötilasta matalampaan, ja lämmön johtumista kuvaa ns. Fourierin laki, jonka mukaan lämmön virtausnopeutta edustaa vektorikenttä  $\mathbf{F} = -k\nabla T$ , missä vakio  $k > 0$  kuvaa materiaalin lämmönjohtavuutta.

Jos  $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  ja pinta  $S$  yksikköpallon  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  pinta, saadaan  $\mathbf{F} = -2k(x, y, z)$ . Pinnan ulospäin suuntautunut yksikkönormaalivektori saadaan seurauksen 1 mukaan jakamalla funktion  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  gradientti normillaan, jolloin

$$\mathbf{n} = \sqrt{(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)}^{-1} (2x, 2y, 2z) = (x, y, z)$$

pinnalla  $S$ . Tällöin  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2k(x, y, z) \cdot (x, y, z) = -2k(x^2 + y^2 + z^2) = -2k$  pinnalla  $S$ . Näin ollen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \int_S (-2k) dA = -2k \cdot 4\pi = -8\pi k.$$

## 2.4 Stokesin lause

### 2.4.1 Greenin lause tasissa

*Greenin lause* on yksi Newton-Leibnizin säännön analogioista ja erikoistapaus abstraktista Stokesin lauseesta. Greenin lausetta varten oletetaan, että  $P$  ja  $Q$  ovat funktioita  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ja että  $P$ :n ja  $Q$ :n ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Tarkastellaan suorakulmiota  $A = [a, b] \times [c, d]$  ja lasketaan funktion  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  integraali tämän suorakulmion yli.

$$\int_A \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy. \quad (2.9)$$

Lasketaan sitten käyräintegraali  $\int_\gamma Q(x, y) dy$ , missä  $\gamma$  on suorakulmion  $A$  reuna vastapäivään kierrettynä. Reunoilla  $y = c$  ja  $y = d$  on  $dy = 0$ , joten integraaliin jää vain reunat  $x = b$  ( $y$  kulkee välin  $c \rightarrow d$ ) ja  $x = a$  ( $y$  kulkee välin  $d \rightarrow c$ ).

Tällöin

$$\int_\gamma Q(x, y) dy = \int_c^d Q(b, y) dy + \int_d^c Q(a, y) dy = \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy.$$

Huomataan siis, että saadut integraalit ovat identtiset:

$$\int_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_\gamma Q dy. \quad (2.10)$$

Täsmälleen samoin voidaan näyttää, että

$$-\int_A \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_\gamma P dx, \quad (2.11)$$

jolloin siis yhdistämällä (2.10) ja (2.11) saadaan

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Jos tarkasteltavana on suorakulmiota yleisempi  $\mathbb{R}^2$ :n alue, voidaan sen sisäosa jakaa suorakulmioihin ja Greenin lause voidaan yleistää:

**Lause 27 (Greenin lause tasossa).** Jos  $A$  on tason  $\mathbb{R}^2$  käyräyhtenäinen joukko ja  $\partial A$  sen reuna, sekä  $P$  ja  $Q$  funktioita, joiden 1. kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, on

$$\int_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial A} P dx + Q dy,$$

missä käyräintegraali yli joukon  $A$  reunan  $\partial A$  lasketaan vastapäivään.

*Esimerkki 56.* Lasketaan käyräintegraali

$$\int_{\gamma} xy dx - y^2 dy$$

yli suljetun käyrän  $\gamma$ , jonka osat ovat  $\{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $\{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 2\}$  ja  $\{(2\sqrt{y}, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ . Greenin lausetta käyttämällä voidaan käyräintegraali muuttaa tavalliseksi integraaliksi yli  $\mathbb{R}^2$ :n alueen  $A$ , jota rajoittaa käyrä  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} xy dx - y^2 dy &= \int_A \left( \frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dx dy \\ &= - \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{2\sqrt{y}} x dx dy = - \int_0^1 \frac{1}{2} (2\sqrt{y})^2 dy = - \int_0^1 2y dy = -1. \end{aligned}$$