

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2025

Demonstraatio 1, 2.10.2025

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ja laskimia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

Määritä tehtävissä 1 ja 2 derivaattafunktiot $f'(x)$ Käyttämällä taulukkokirjaa.

1. a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$, b) $f(x) = x^2 \cos x$
2. b) $f(x) = (3x^2 + 1)^2$, b) $f(x) = \cos^3 x + 2x \sin x + e^{x^3}$
3. Olkoon $f(x) = 2x - 1$. Laske etäisyys $d(f(x), f(3))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 3)$. Miten $d(f(x), f(3))$ ja $d(x, 3)$ suhtautuvat toisiinsa?
4. Olkoon $f(x) = x^2$. a) Laske etäisyys $d(f(x), f(2))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 2)$. Jos vielä rajoitetaan muuttujaa x siten, että $x \in (1, 3)$, millainen yläraja etäisyydelle $d(f(x), f(2))$ saadaan? b) Jos rajoitetta $x \in (1, 3)$ tiukennetaan muotoon $x \in (1.9, 2.1)$, millainen yläraja etäisyydelle $d(f(x), f(2))$ saadaan?
5. Olkoon $f(x) = \cos^3 x + 2x \sin x + e^{x^3}$. Perustele lyhyesti, miksi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.
6. Selvitä funktion $f(x) = \sin x$ derivaattafunktio määritelmään perustuen:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Vihje: $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ja $\cos$ on jatkuva funktio.

7. Yhtälö $x^3 + 2x^2y - 5xy^2 + y^3 = -7$ määrittelee jossain pisteen $(1, 2)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Määritä $f'(1)$.
8. Parametriesitys $\{(t^3 + 2t + 4, t^2 - 3t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ määrittelee jossain pisteen $(1, 3)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Määritä $f'(1)$.
9. Määritä antiderivaatat $\int f(x) dx$, kun
 - a) $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6x - 5$, b) $f(x) = 3(x^2 + x + 1)^2(2x + 1)$.