

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2025

Demonstraatio 2, 9.10.2025

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Olkoon $f(x) = 2x^3 + 4x - 3$. Perustele miksi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on bijektio. Määritä $Df^{-1}(3)$. Ohje: Käytä käänteisfunktion derivointisääntöä. On selvitettävä sellainen x , jolla $f(x) = 3$ (miksi?) Kokeile joitain pieniä lukuarvoja tämän yhtälön ratkaisemiseksi.
2. Olkoon $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 3y^3 - 5$. Laske $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Määritä $f^{(n)}(x)$ kun $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
4. Määritä $\int x^2 \ln x \, dx$. Vihje: Osittaisintegrointi.
5. Määritä $\int \frac{\cos \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$ käyttämällä sijoitusta $x = t^3$.
6. Määritä $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)} \, dx$. Vihje: Etsi luentoesimerkin mukaisesti sellaiset luvut A ja B että

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

7. Newtonin gravitaatiolain mukaan kahden kappaleen välillä vallitsee vetovoima joka on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin m ja M sekä kääntäen verrannollinen etäisyyden r neliöön:

$$F = G \frac{mM}{r^2},$$

missä verrannollisuuskerroin G on ns. gravitaatiovakio. Käytä luennolla esitettyä lineaarista approksimaatiota arvioidaksesi kuinka monta prosenttia maan vetovoima kiertoradalla 360 km korkeudella olevalla avaruusasemalla on maan pinnalla vallitsevasta vetovoimasta. Maan säteeksi arvioidaan 6400 km.

8. Etsi differentiaaliyhtälön $y(x)^2 y'(x) = 2$ ratkaisu, kun tiedetään, että $y(0) = 1$. Vihje: Sopivalla vakiolla kertomalla yhtälö saadaan muotoon, jossa vasen puoli on sellaisen yhdistetyn funktion derivaatta, jossa y on sisäfunktio. Kts. Luentoesimerkki.
9. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^4}.$$

Vihje: L'Hospitalin sääntö.