

# Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2025

## Demonstraatio 3, 16.10.2025

**Huom:** Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Määritä  $\int \tan x \, dx$ . Ohje:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Mieti miten osoittaja saadaan nimitäjästä differentiaalilaskennan keinoin.
2. Käytä Newtonin menetelmää yhtälön  $x^5 + 3x - 2 = 0$  likimääräisen ratkaisun löytämiseksi sellaisella tarkkudella, jossa vaikuttaa olevan 8 desimaalia oikein. Ohje: Valitse alkuarvo siten, että se vaikuttaisi olevan lähellä nollakohtaa. Tässä tehtävässä voi käyttää laskinta tai matematiikkaohjelmaa.
3. Funktiolla  $\frac{1}{1-x}$  on pisteessä  $x = 0$  tunnettu Taylorin kehitelmä

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$$

Onko siis seuraava oikein kun  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + O(x^4) \right)?$$

Entä onko seuraava oikein kun  $x \rightarrow 2$ :

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{1-(x-2)} = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + O((x-2)^4)?$$

Kumpi näistä on "oikea" Taylorin kehitelmä funktiolle  $f(x) = \frac{1}{3-x}$ ?

4. Etsi funktiolle  $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+5)}$  astetta 4 oleva Taylorin polynomi pisteessä  $x = 0$ . Ohje: Luentoiesimerkki.
5. Määritä

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+5)} \, dx.$$

6. Etsi sinifunktiolle neljännen asteen Taylorin polynomi pisteessä  $\frac{\pi}{2}$ . Kirjoita polynomi muodossa

$$c_0 + c_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + c_2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \dots,$$

äläkä kerro sulkeita auki.

7. Määritä funktiolle  $f(x) = \sin(x^2)$  6. asteen Taylorin kehitelmä pisteessä  $x = 0$  sinifunktion tunnetun kehitelmän perusteella.
8. Etsi funktiolle  $f(x) = (\sin x)^2$  astetta 4 oleva Taylorin polynomi pisteessä  $x = 0$ . Vihje: Voit käyttää tunnettua kehitelmää  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$  ja kertoa tämän itsensä kanssa.
9. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2 + \cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^2) - x^2}$$

Käyttämällä Taylorin kehitelmiä.