

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Määritelmä

Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ (*avoin*) *ympäristö* on avoin väli (a, b) , joka sisältää pisteen x_0 .

Raja-arvo

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 avoimessa ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_\epsilon \rightarrow d(f(x), y) < \epsilon).$$

ja sanotaan, että reaalifunktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$.

Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ voidaan merkitä myös $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y$.

Lause

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ja $c \in \mathbb{R}$. Seuraavat raja-arvojen laskusäännöt pätevät:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB$.
- Jos $B \neq 0$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
- Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ ja $\lim_{x \rightarrow y} g(x) = z$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z$.

Esimerkki

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 3} &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} \\ &= \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1}{1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}?$$

Esimerkki

Raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ ei ole olemassa.

Jos nimittäin $x > 2$, voidaan kirjoittaa $x = 2 + \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{\epsilon} > 0$, ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä suurempi on $\frac{1}{\epsilon}$.

Toisaalta, jos $x < 2$ voidaan kirjoittaa $x = 2 - \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{\epsilon} < 0$ ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä pienempi on $-\frac{1}{\epsilon}$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$
$$\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta_M > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_M \rightarrow f(x) > M)$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön*.

Huomautus

Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavat symbolin $-\infty$ sisältävät raja-arvot määritellään analogisesti.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2} > M$, kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Jos siis $d(0, x) = |x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$, on $\frac{1}{x^2} > M$.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$$

ei ole olemassa myöskään äärettömänä.

Jos olisi (∞) , pitäisi olla $\frac{1}{x-2} > 100$ aina, kun $d(x, 2) < \delta_{100}$. Näin ei voi olla, sillä arvoilla $x < 2$ on $\frac{1}{x-2} < 0$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä (x_0, b) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y \\ \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(x, x_0) < \delta) \wedge (x > x_0) \\ \rightarrow d(f(x), y) < \epsilon). \end{aligned}$$

Tällöin sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös symbolilla $f(x_0+)$.
Vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = y$ määritellään analogisesti ja merkitään $f(x_0-)$. Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. f on *jatkuva* pisteessä x_0 , jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{jos } x \neq 2 \\ 0, & \text{jos } x = 2. \end{cases}$$

on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty reaalifunktio, ei jatkuva pisteessä $x = 2$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 1$.

Määritelmä

Funktio f on *jatkuva välillä* $I = [a, b]$, jos f on jatkuva jokaisessa I :n pisteessä.

Esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

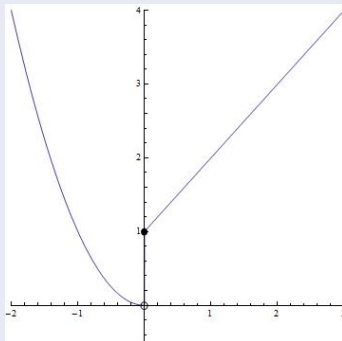
Funktio f ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbb{Q}$.

Määritelmä

- Olkoon f määritelty jollakin välillä $[x_0, b)$ ja
 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on oikealta jatkuva pisteessä x_0 .
- Olkoon f määritelty jollakin välillä $(a, x_0]$ ja
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on vasemmalta jatkuva pisteessä x_0 .

Määritellään $f(x)$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x < 0, \\ x + 1, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$



Pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva, vasemmalta epäjatkuva.

Lause

Olko $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I . Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Muistutus

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Lause

Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Määritelmä 1

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h) \approx k \cdot h$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä 2

Raja-arvo $k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ on olemassa

Huomautus

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä x , jos sitä voidaan x :n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I , niin $f'(x) = 0$ välillä I .

Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$.
Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Huomautus

Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan $f(x) \neq 0$.

Lause: Osamäärän derivaatta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} (f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)\right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.

Jos $k > 0$, on

$$\begin{aligned}(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k - x^k \\&= kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k \\&= kx^{k-1}h + h \underbrace{\left(\binom{k}{2}x^{k-2}h^1 + \dots + h^{k-1} \right)}_{\epsilon(h)}.\end{aligned}$$

Jos $k < 0$, merkitään $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$ ja käytetään aiempia tuloksia.

Lause: Käänteisfunktio

Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I , derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, on käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

"Todistus"

Koska

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

saadaan ketjusäännöllä

$$Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1.$$

Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x,$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x,$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x.$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

Yleinen potenssifunktio

$$\frac{d}{dx} x^\alpha?$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Implisiittimuoto

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$$