

# Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2025

## Rollen lause

Jos  $f$  on välillä  $[a, b]$  derivoituva ja  $f(a) = f(b)$ , on maksimi- tai minimikohdassa välillä  $[a, b]$  voimassa  $f'(\xi) = 0$ .

## Differentiaalilaskennan väliarvause

Jos  $f$  on jatkuva välillä  $[a, b]$  ja derivoituva välillä  $(a, b)$ , niin tällöin on ainakin yksi piste  $\xi \in (a, b)$ , jossa

$$f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a).$$

## Integraalilaskennan (antiderivaattojen) peruslause

Jos välillä  $I$  on  $f'(x) = 0$ , niin  $f$  on vakio välillä  $I$ .

### Todistus

Jos  $a, x \in I$ , niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten  $f(x) = f(a)$ .

### Seuraus

Jos  $f'(x) = g'(x)$  välillä  $I$ , niin  $f(x) = g(x) + C$  välillä  $I$

### Todistus

Funktio  $h(x) = f(x) - g(x)$  toteuttaa  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ , joten se on vakio  $C$  välillä  $I$ .

## Seuraus

Jos  $f'(x) \geq 0$  välillä  $I = (a, b)$ , niin  $f$  on kasvava välillä  $[a, b]$

## Todistus

Valitaan  $x_1 < x_2$  väliltä  $[a, b]$ . Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0.$$

## Huomautus

Jos välillä  $(a, b)$  on  $f'(x) > 0$ ,  $f'(x) \leq 0$ , tai  $f'(x) < 0$ , voidaan vastaavasti todistaa, että funktio  $f$  on aidosti kasvava, vähenevä, tai aidosti vähenevä välillä  $[a, b]$ .

## Yleistetty väliarvolause

Jos  $f$  ja  $g$  ovat jatkuvia välillä  $[a, b]$  ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste  $\xi \in (a, b)$ , jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

## Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa  $\xi$ , jolle  $h'(\xi) = 0$ . Koska  $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$ , seuraa väite suoraan tästä. □

## Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla  $g(x) = x$ .

## Lause (l'Hospital)

Olkoon  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ja  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ja raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä  $\xi \in (a, x)$  (Jos  $f(a)$  tai  $g(a)$  ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollassa). Koko ajan joka tapauksessa  $|\xi| \leq |x|$ , joten  $\xi \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

## Esimerkkejä

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

## Esimerkkejä

- Käyrän  $y = f(x) = x^3$  tangentti pisteessä  $x = 2$ .
- Yksikköympyrälle  $x^2 + y^2 = 1$  pisteeseen  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  liittyvän tangentin yhtälö.



## Lineaarinen approksimaatio

$$f(x + h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään  $\Delta x = h$  ja  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , jolloin

$$\underbrace{f(x + \Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

## Esimerkki

Pallon sädettä kasvatetaan prosentin verran. Paljonko kasvaa tilavuus?

## Määritelmä

Piste  $x_0$  on reaalifunktion  $f$  *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen  $x_0$  ympäristö  $I$ , että  $f(x) \leq f(x_0)$  aina, kun  $x \in I$ . Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

## Huomautus

Jos  $f$  on derivoituva, on Rollen lauseen todistuksen perusteella ääriarvopisteissä  $x_0$  on välttämättä  $f'(x_0) = 0$ .

## Huomautus

Voidaan todistaa: Jos  $f'(x_0) = 0$  ja  $f''(x_0) < 0$ , on  $x_0$  lokaali maksimi. Jos taas  $f''(x_0) > 0$ , on  $x_0$  lokaali minimi. Jos taas  $f''(x_0) = 0$ , ei  $x_0$  välttämättä ole ääriarvopiste, vaan voi olla ns. satulapiste.

# Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

## Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \dots, \dots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

## Huomautus

Muotoa  $y' = f(x)$  olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x) dx + C.$$

Vakio  $C$  määräytyy ns. alkuehdon (reunaehdon)  $y(0) = y_0$  perusteella.

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Automaattisorvi

$$D(t)D'(t) = k$$

## Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002 \dots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513 \dots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371 \dots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613 \dots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167 \dots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136 \dots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.718270714532649 \dots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.752944868792959 \dots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.729678362369799 \dots$
- $x_{10} = \cos x_9 = 0.745388854165797 \dots$
- $x_{11} = \cos x_{10} = 0.734824214649772 \dots$

## Esimerkki

$$x = 0.73908513321516064165531208767 \dots$$

on yhtälön  $x = \cos x$  ratkaisu.