

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 2, 5.3.2026

Älä käytä tehtävissä tecoälyä, vaan omaasi.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' - 2y' + 4y = e^{2t}$ reunaehdoilla $y(0) = y'(0) = 1$ käyttämällä Laplace-muunnoksia.
2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3x^2y = 3x^2$
3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $x^2y' + xy = 1$. Vihje: Suorita ensin jakolasku.
4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 2xy = 1$. Huom: Ratkaisussa esiintyy integraali jota on hankala sieventää ja siten ratkaisuun jäänee integraalimerkintä.
5. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

sarjaratkaisut alkuehdoilla $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ja alkuehdoilla $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
1. Millä vakion λ arvoilla löytyy ratkaisu, joka on polynomifunktio? Ohje: Oleta funktion y olevan muotoa

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

derivoi termeittäin derivaattaa y' varten ja toisen kerran y'' :a varten. Sijoita näin saadut lausekkeet differentiaaliyhtälöön, nosta/laske summausindeksejä sopivasti ja päättelä miten kerroin a_{n+2} riippuu kertoimesta a_n . Kirjoita sarjan muutama ensimmäinen termi näkyviin.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y^2y' = \frac{x}{3}$
7. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = x^2e^y$.
8. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \frac{x+1}{y}$
9. Ratkaise differentiaaliyhtälö $3x^2 + 2xy + 3 + (x^2 - 4y)y' = 0$. Ohje: Yhtälö on eksakti.