

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 4, 12.3.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit.

Mallivastaus: Ominaisarvot ovat yhtälön

$$\begin{vmatrix} -5 - \lambda & 3 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

ratkaisut, siis $\lambda \in \{-2, -1\}$.

Ominaisvektorit saadaan ratkaisemalla yhtälö $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Kun $\lambda = -2$, tämä saa muodon

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvoon $\lambda = -2$ liittyvät ominaisvektorit ovat siis muotoa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Samalla tavalla ominaisarvoon $\lambda = -1$ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälöstä

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja nämä ovat muotoa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Olkoon A edellisen tehtävän matriisi ja $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Esitä $e^{tA}\mathbf{c}$ muodossa $X(t)\mathbf{d}$, missä $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$. Ohje: Voit laskea eksponenttimatriisin e^{tA} , jolloin pyydetyssä esityksessä $X(t)$ on eksponenttimatriisi, tai käyttää luennoilla esitettyä, ominaisvektoreihin perustuvaa tapaa.

Mallivastaus: Matriisin A ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^T$ ja $\mathbf{v}_2 = (3, 4)^T$ muodostavat selvästi avaruuden \mathbb{R}^2 kannan, joten mikä hyvänsä vektori $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ voidaan esittää niiden lineaarikombinaationa $\mathbf{c} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2$. Tällöin

$$\begin{aligned} e^{tA}\mathbf{c} &= d_1e^{tA}\mathbf{v}_1 + d_2e^{tA}\mathbf{v}_2 \\ &= d_1e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-t} \\ e^{-2t} & 4e^{-t} \end{pmatrix}}_{X(t)} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Etsi yleinen ratkaisu seuraavalle DY-parille ja sellainen ratkaisu, jolle $x(0) = 1$ ja $y(0) = 2$.

$$\begin{cases} x' &= -5x + 3y \\ y' &= -4x + 2y \end{cases}$$

Mallivastaus: Edellisen tehtävän perusteella yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c} = X(t)\mathbf{d}. \quad (\text{tehtävässä 2})$$

Kysytty ratkaisu saadaan sijoittamalla tähän $t = 0$, jolloin

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

josta

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jolloin siis $x = -2e^{-2t} + 3e^{-t}$ ja $y = -2e^{-2t} + 4e^{-t}$.

4. Etsi jokin yksittäinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= -5x + 3y + t \\ y' &= -4x + 2y + t^2 \end{cases}$$

Mallivastaus: Luennolla esitetyn mukaan yksittäinen ratkaisu saadaan muodossa

$$\begin{aligned} & X(t) \int X(t)^{-1} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-t} \\ e^{-2t} & 4e^{-t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 4e^{2t} & -3e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-t} \\ e^{-2t} & 4e^{-t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 4te^{2t} - 3t^2e^{2t} \\ -te^t + t^2e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{-t} \\ e^{-2t} & 4e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{2t}(7 - 14t + 6t^2) \\ e^t(3 - 3t + t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(29 - 22t + 6t^2) \\ \frac{1}{4}(41 - 34t + 10t^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit.

Mallivastaus: Ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -4 \\ 9 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Ominaisvektorit ovat saadaan yhtälöstä

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvoon $\lambda = -2$ liittyvät ominaisvektorit ovat siis muotoa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kertalukua 1 olevat ominaisvektorit muodostavat siis vain 1-ulotteisen aliavaruuden. Jotta saataisiin koko \mathbb{R}^2 :n generoiva joukko, pitää etsiä myös 2. kertaluvun ominaisvektori. Nämä saadaan yhtälöstä $(A + 2I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$, mutta koska $(A + 2I)^2 = O$, voidaan sellaiseksi valita mikä tahansa avaruuden \mathbb{R}^2 vektori, joka ei ole vektorin $(2, 3)^T$ skalaarimonikerta, esim $(1, 0)^T$.

6. Etsi yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' = 4x - 4y \\ y' = 9x - 8y \end{cases}$$

Mallivastaus: Luennoilla esitetyn mukaan yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 e^{-2tA} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} (I + t(A + 2I)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 + 6t \\ 9t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Olkoon x syöte ja y tuloste, joille pätee differentiaaliyhtälö

$$y'' + 3y' + 2y = x' + x$$

Määritä differentiaaliyhtälöllä kuvatun järjestelmän siirtofunktio.

Mallivastaus: Laplace-muunnoksilla saadaan

$$s^2 Y + 3sY + 2Y = sX + X \Leftrightarrow (s^2 + 3s + 2)Y = (s + 1)X,$$

josta $Y = \frac{s+1}{s^2+3s+2} X$. Siirtofunktio on siis

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

8. Onko edellisen tehtävän järjestelmä stabiili?

Mallivastaus: Koska

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 2}.$$

Siirtofunktion ainoa napa on siis $s = -2 < 0$, joten järjestelmä on stabiili.

9. Olkoon x syöte ja y tuloste, joille pätee differentiaaliyhtälö

$$y'' + y' - 2y = x' - x$$

Määritä differentiaaliyhtälöllä kuvatun järjestelmän siirtofunktio. Onko järjestelmä stabiili?

Mallivastaus: Laplace-muunnoksilla saadaan

$$\begin{aligned} s^2 Y + sY - 2Y &= sX - X \Leftrightarrow (s^2 + s - 2)Y = (s - 1)X \\ \Leftrightarrow Y &= \frac{s - 1}{s^2 + s - 2} X = \frac{s - 1}{(s - 1)(s + 2)} X = \frac{1}{s + 2} X \end{aligned}$$

Siirtofunktion ainoa napa on $s = -2 < 0$, joten järjestelmä on stabiili.