

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 4, 19.3.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Määritä jonolle $x_n = na^n$ Z -muunnos. Ohje: Hyödynnä ensin muunnos jonolle a^n (luennoilla) ja kokeile derivointia z :n suhteen.
2. Määritellään lukujono $G_0 = 2$, $G_1 = 1$ ja $G_{n+2} = G_{n+1} + 6G_n$ kun $n \geq 2$. Määritä jonon G_n jäsenille eksplisiittinen lauseke käyttämällä Z -muunnoksia. Ohje: Luentoexamplesimerkki.
3. Selitä miten funktion $x(t) = \sin(t)$ Z -muunnos voitaisiin määrittää, kun näytteenottoväli on T . Tässä tehtävässä ei tarvitse esittää tulosta, vaan menetelmä miten tulokseen voitaisiin päästä. Ohje: Eulerin kaava.
4. Oletetaan, että syötejono x_n (input) ja tulostejono y_n (output) toteuttavat yhtälön

$$y_{n+1} - 3y_n = x_n.$$

Onko systeemi stabiili? Jos ei, millainen rajoitettu syöte voisi tuottaa rajoittamattoman tulosteen? Ohje: Laske aluksi Z -muunnos puolittain ja selvitä millaisia siirtofunktion navat ovat.

5. Oletetaan, että syötejono x_n (input) ja tulostejono y_n (output) toteuttavat yhtälön

$$3y_{n+2} - 13y_{n+1} + 4y_n = x_{n+1} - 4x_n.$$

Onko systeemi stabiili?

6. Etsi mahdollisimman yleinen ratkaisu osittaisdifferentiaaliyhtälölle

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 2xy.$$

7. Etsi yksi ratkaisu aaltoyhtälölle

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2}$$

Käyttämällä yritettä $\phi(x, t) = X(x)T(t)$, missä X riippuu vain paikasta x ja T vain ajasta t . **Kirjoitusvirheet korjattu 17.3.**

8. Muunna DY-ryhmä

$$\begin{cases} x'' &= yx' + z^2y \\ y' &= y^3 - 3z'x \end{cases}$$

sellaiseksi DY-ryhmäksi, jossa vasemmalla puolella esiintyy vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja ja oikealla puolella ei esiinny derivaattoja ollenkaan. Ohje: Määrittele uusia funktioita tunnettujen funktioiden derivaattoina ja kasvata yhtälöiden määrää.

9. Avaruuden \mathbb{R}^2 piste $(x(t), y(t))$ liikkeen ajan myötä määrittää DY-pari

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

alkuehtoineen. Selvitä mitä on $(x', y') \cdot (x, y)$ (pistetulo) ja esitä sanallinen tulkinta. Ohje: (x, y) edustaa pisteen paikkaa, (x', y') taas pisteen nopeutta.

Kirjoita differentiaaliyhtälö ratakäyrille. Mitä menetelmiä sen ratkaisemiseksi on?