# Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

**Demonstraatio 4, 19.3.2026**

**Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.**

1. Määritä jonolle $x_n = na^n$ $Z$-muunnos. Ohje: Hyödynnä ensin muunnos jonolle $a^n$ (luennoilla) ja kokeile derivointia $z$:n suhteen.

   Mallivastaus: Luennolla esitetyn mukaan

   $$\mathcal{Z}[a^n] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}.$$

   Derivoimalla yhtälö

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$$

   puolittain saadaan

   $$\sum_{n=0}^{\infty} -na^n z^{-n-1} = \frac{-a}{(z-a)^2}$$

   ja tästä edelleen

   $$\sum_{n=0}^{\infty} na^n z^{-n} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

   Tästä nähdään, että

   $$\mathcal{Z}[na^n] = \frac{az}{(z-a)^2}$$

2. Määritellään lukujono $G_0 = 2$, $G_1 = 1$ ja $G_{n+2} = G_{n+1} + 6G_n$ kun $n \geq 2$. Määritä jonon $G_n$ jäsenille eksplisiittinen lauseke käyttämällä $Z$-muunnoksia. Ohje: Luentoesimerkki.

   Mallivastaus: Ottamalla huomoioon alkuarvot saadaan rekursioyhtälöstä $G_{n+2} = G_{n+1} + 6G_n$ $Z$-muunnos laskemalla

   $$z^2\widehat{G}(z) - 2z^2 - z = z\widehat{G}(z) - 2z + 6\widehat{G}(z),$$

   josta

   $$\widehat{G}(z) = \frac{2z^2 - z}{z^2 - z - 6} = \frac{2 - \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z} - \frac{6}{z^2}} = \frac{2-u}{1-u-6u^2},$$

   kun merkitään $u = \frac{1}{z}$. Osamurtohajotelmilla

   $$\widehat{G}(z) = \frac{2-u}{1-u-6u^2} = \frac{1}{1+2u} + \frac{1}{1-3u} = \frac{z}{z+2} + \frac{z}{z-3},$$

   josta käänteisellä $Z$-muunnoksella saadaan

   $$G_n = (-2)^n + 3^n.$$

3. Selitä miten funktion $x(t) = \sin(t)$ $Z$-muunnos voitaisiin määrittää, kun näytteenottoväli on $T$. Tässä tehtävässä ei tarvitse esittää tulosta, vaan menetelmä miten tulokseen voitaisiin päästä. Ohje: Eulerin kaava.

   Mallivastaus: Pitää määrittää

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nT) z^{-n}.$$

Tämä voidaan tehdä käyttämällä Eulerin kaavaa, jonka mukaan $\sin(nT) = \frac{1}{2i}(e^{inT} - e^{-inT})$, jolloin määritettäväksi jää

$$\frac{1}{2i}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} e^{inT}z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-inT}z^{-n}\Big).$$

Kummankin sarjan summa voidaan määrittää aiemman tiedon perusteella ja näin saadaan kysytyksi muunnokseksi

$$\frac{1}{2i}\Big(\frac{z}{z-e^{iT}} - \frac{z}{z-e^{-iT}}\Big) = \frac{1}{2i}\frac{z(e^{iT}-e^{-iT})}{z^2 - z(e^{iT}+e^{-iT})+1} = \frac{z\sin T}{z^2 - 2z\cos T + 1}$$

4. Oletetaan, että syötejono $x_n$ (input) ja tulostejono $y_n$ (output) toteuttavat yhtälön

$$y_{n+1} - 3y_n = x_n.$$

Onko systeemi stabiili? Jos ei, millainen rajoitettu syöte voisi tuottaa rajoittamattoman tulosteen? Ohje: Laske aluksi $Z$-muunnos puolittain ja selvitä millaisia siirtofunktion navat ovat.

Mallivastaus: $Z$-muunnoksilla saadaan

$$zY - 3Y = X,$$

josta $Y = \frac{1}{z-3}X$, mistä edelleen nähdään että siirtofunktion ainoa napa on 3. Koska $|3| > 1$, on systeemi epästabiili.

Koska $y_{n+1} = 3y_n + x_n$, saadaan rajoittamaton tuloste esim. rajoitetulla syötteellä $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, jne. Jos määritellään $y_0 = 0$, on $y_1 = 1$, $y_2 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, $y_3 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ $y_4 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$, jne. Jono $y_n$ on selvästi rajoittamaton.

5. Oletetaan, että syötejono $x_n$ (input) ja tulostejono $y_n$ (output) toteuttavat yhtälön

$$3y_{n+2} - 13y_{n+1} + 4y_n = x_{n+1} - 4x_n.$$

Onko systeemi stabiili?

Mallivastaus: $Z$-muunnoksilla saadaan

$$3z^2Y - 13zY + 4Y = zX - 4X,$$

josta

$$Y = \frac{z-4}{3z^2 - 13z + 4} = \frac{1}{3z-1}$$

Näin ollen siirtofunktion ainoa napa on $\frac{1}{3}$, itseisarvoltaan pienempi kuin 1, joten systeemi on stabiili.

6. Etsi mahdollisimman yleinen ratkaisu osittaisdifferentiaaliyhtälölle

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2xy.$$

Mallivastaus: Integroimalla $x$:n suhteen saadaan

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2 y + c(y),$$

missä $c(y)$ om vain muuttujasta $y$ riippuva funktio. Integroimalla tämä $y$:n suhteen saadaan

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \int c(y)\,dy + D(x),$$

missä $D(x)$ on vain $x$:stä riippuva funktio. Kun merkitään $C(y) = \int c(y)\,dy$. saadaan yleiseksi ratkaisuksi

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y) + D(x),$$

missä $C$ ja $D$ ovat kahdesti derivoituvia yhden muuttujan funktioita.

7. Etsi yksi ratkaisu aaltoyhtälölle

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}$$

Käyttämällä yritettä $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, missä $X$ riippuu vain paikasta $x$ ja $T$ vain ajasta $t$.

Mallivastaus: Derivoimalla yrite saadaan $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) = X''(x)T(t)$ ja $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x,t) = X(x)T''(t)$. Sijoittamalla nämä aaltoyhtälöön saadaan

$$X(x)T''(t) = v^2X''(x)T(t),$$

josta

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = v^2\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Koska tämän yhtälön vasen puoli riippuu vain $t$:stä ja oikea vain $x$:stä, ovat molemmat vakioita, $\frac{X''}{X} = \alpha$ ja $\frac{T''}{T} = v^2\alpha$. Näin saadaan kaksi lineaarista vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä $X'' = \alpha X$ ja $T'' = v^2\alpha T$, joiden ratkaisut ovat $X = X_0e^{\pm\sqrt{\alpha}x}$ ja $T = T_0e^{\pm v\sqrt{\alpha}t}$. Yhdistämällä nämä saadaan ratkaisuksi

$$\phi = \underbrace{X_0T_0}_{A}e^{\pm\sqrt{\alpha}(x\pm vt)}.$$

**Huomautus:** Monissa yhteyksissä etsitään rajoitettuja ratkaisuja. Nämä voidaan saavuttaa valitsemalla $\sqrt{\alpha} = ik$ imaginaariseksi, jolloin

$$\phi(x,t) = Ae^{ik(x\pm vt)}.$$

Eulerin kaavan avulla tästä saadaan reaaliset sini- ja kosinifunktion avulla esitettävät ratkaisut.

8. Muunna DY-ryhmä

$$\begin{cases} x'' &= yx' + z^2y \\ y' &= y^3 - 3z'x \end{cases}$$

sellaiseksi DY-ryhmäksi, jossa vasemmalla puolella esiintyy vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja ja oikealla puolella ei esiinny derivaattoja ollenkaan. Ohje: Määrittele uusia funktioita tunnettujen funktioiden derivaattoina ja kasvata yhtälöiden määrää.

Mallivastaus: Merkitään $x' = v$ ja $z' = w$, jolloin saadaan DY-ryhmä

$$\begin{cases} v' &= yv + z^2y \\ y' &= y^3 - 3wx \\ x' &= v \\ z' &= w \end{cases}$$

9. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ piste $(x(t), y(t))$ liikkeen ajan myötä määrittää DY-pari

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

alkuehtoineen. Selvitä mitä on $(x', y') \cdot (x, y)$ (pistetulo) ja esitä sanallinen tulkinta. Ohje: $(x, y)$ edustaa pisteen paikkaa, $(x', y')$ taas pisteen nopeutta.

Kirjoita differentiaaliyhtälö ratakäyrille. Mitä menetelmiä sen ratkaisemiseksi on?

Mallivastaus:

$$(x', y') \cdot (x, y) = (x - y, x + y) \cdot (x, y) = x^2 - xy + xy + y^2 = x^2 + y^2 = ||(x, y)||^2.$$

Koska lisäksi $||(x', y')|| = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$, on vektoreiden $(x, y)$ ja $(x', y')$ välisen kulman kosini

$$\frac{(x, y) \cdot (x', y')}{||(x, y)|| ||x', y'||} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

mikä puolestaan merkitsee sitä, että paikka- ja nopeusvektorin välinen kulma on 45 astetta.

Ratakäyrien DY on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Jos sijoitetaan $z = \frac{y}{x}$, on $y = zx$ ja $y' = z'x + z$ ja yhtälö saa muodon

$$z'x + z = \frac{1 + z}{1 - z} \Leftrightarrow z'x = \frac{1 + z^2}{1 - z},$$

joka on separoituva:

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{1 + z^2}{1 - z} \Rightarrow \int \frac{1 - z}{1 + z^2}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx + C$$

ja edelleen

$$\arctan z - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln x + C.$$

Sijoittamalla $z = \frac{y}{x}$ saadaan ratkaisuksi

$$\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{y^2}{x^2}) = \ln x + C \Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

Mieti millaiseksi tämä muuttuu napakoordinaattimuodossa $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

**Huomautus:** Ratkaisua voidaan etsiä myös seuraavasti. DY-pari on vakiokertoiminen ja homogeeninen ja sen kerroinmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jonka ominaisarvot ovat $1 \pm i$ ja ominaisvektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Täten yleinen ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Eulerin kaavan avulla tästä saadaan reaalinen muoto (yksi mahdollisuus)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t. \end{pmatrix}$$