

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Esimerkkejä

- $\gcd((x-2)(x-5), (x-1)(x+3)(x+2)) = 1$
- $\gcd((x-2)(x-5), (x-1)(x+3)(x-2)) = x-2$
- $\gcd((x-2)^4(x-1)(x+2), (x-2)(x-1)^3(x+3)) = (x-2)(x-1)$

Huomautus

Koska kaikki vakiopolynomit $c \neq 0$ ovat liitännäisiä 1:n kanssa, tarkoittaa $\gcd(p, q) = 1$ sitä, että polynomeilla p ja q on yhteisenä tekijänä vain vakio.

Määritelmä

Polynomi p on jaoton, jos kaikki sen tekijät ovat liitännäisiä joko p :n tai vakiopolynomin 1 kanssa.

Esimerkki

Polynomilla $x^2 + 1$ voi asteensa puolesta olla vain 0., 1., tai 2. asteen tekijä. 2. asteen tekijä on liitännäinen $x^2 + 1$ kanssa ja 0. asteen tekijä vakiopolynomin 1 kanssa. 1 asteen tekijää $x - c \in \mathbb{R}[x]$ ei ole, koska polynomilla $x^2 + 1$ ei ole reaalista nollakohtaa c . Näin ollen $x^2 + 1$ on jaoton joukossa $\mathbb{R}[x]$.

Esimerkki

$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, joten $x^2 + 1$ ei ole jaoton joukossa $\mathbb{C}[x]$.

Seuraus algebran peruslauseesta

Jokainen polynomi jakautuu $\mathbb{C}[x]$:ssä ensimmäisen asteen tekijöihin:

$$P(x) = a(x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_n)$$

Huomautus

Hajotelman löytäminen on usein hankalaa $\leftrightarrow$ nollakohtien löytäminen hankalaa. Sen sijaan $\gcd(p, q)$ voidaan aina löytää suoraviivaisesti.

Lause

Olkoon $p \in \mathbb{R}[z]$. Jos $p(z) = 0$, niin myös $p(\bar{z}) = 0$.

Todistus

Käytetään kompleksikonjugaatin ominaisuuksia $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ja $\bar{\bar{z}} = z$, jos $z \in \mathbb{R}$.

Jos $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, missä $c_i \in \mathbb{R}$, ja $P(z) = 0$, on myös

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{0} = \overline{P(z)} = \overline{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0} \\ &= \overline{c_n z^n} + \overline{c_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{c_1 z} + \overline{c_0} \\ &= c_n \bar{z}^n + c_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + c_1 \bar{z} + c_0 \\ &= P(\bar{z}) \end{aligned}$$

Lause

$$(z - c)(z - \bar{c}) \in \mathbb{R}[z]$$

Todistus

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\bar{c},$$

$$c + \bar{c} = 2 \operatorname{Re}(c) \in \mathbb{R} \text{ sekä } c\bar{c} = |c|^2 \in \mathbb{R}.$$

Lause

Jokainen polynomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ jakautuu joukossa $\mathbb{R}[x]$ tekijöihin, joiden aste on korkeintaan 2.

Todistus

Kompleksilukujen joukossa $p(x)$:n tiedetään jakautuvan 1. asteen tekijöihin:

$$p(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n).$$

Jos $c_i \notin \mathbb{R}$, esiintyy myös $\overline{c_i}$ nollakohtien joukossa (koska $p(x) \in \mathbb{R}[x]$). Jaotellaan siis nollakohdat $c_1, \dots, c_n$ jonoon $r_1, \dots, r_k, w_1, \overline{w_1}, \dots, w_l, \overline{w_l}$. Tällöin

$$p(x) = a(x - r_1) \dots (x - r_k) \cdot \underbrace{(x - w_1)(x - \overline{w_1})}_{\in \mathbb{R}[x]} \dots \underbrace{(x - w_l)(x - \overline{w_l})}_{\in \mathbb{R}[x]}.$$

Lause (Tyypin I hajotelma)

Olkoon $\deg(p) \leq \deg(q)$. Jos $q \neq 0$ voidaan jakaa tekijöihin $q = q_1 q_2$, joille $\gcd(q_1, q_2) = 1$, on olemassa sellaiset yksikäsitteiset polynomit p_1 ja p_2 , että

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$$

ja $\deg(p_i) < \deg(q_i)$.

Lause (Tyypin II hajotelma)

Olkoon $\deg(p) \leq \deg(q^n)$ ja $q \neq 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset polynomit $p_1, \dots, p_n$, joille

$$\frac{p}{q^n} = \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \dots + \frac{p_n}{q^n},$$

ja $\deg(p_i) < \deg(q)$.

Yhteenveto

- Suorita jakolasku $\frac{p}{q} = a + \frac{r}{q}$, jonka jälkeen $\deg(r) < \deg(q)$.
- Jos nimittäjä q voidaan jakaa tekijöihin $q = q_1 q_2$, missä $\gcd(q_1, q_2) = 1$, etsi polynomit p_i ($\deg(p_i) < \deg(q_i)$) joille

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$$

- Jos nimittäjää ei voi jakaa tekijöihin, joiden $\gcd = 1$, mutta on muotoa q^n , etsi polynomit $p_1, p_2, \dots, p_n$ ($\deg(p_i) < \deg(q)$) joille

$$\frac{p}{q^n} = \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \dots + \frac{p_n}{q^n}.$$

Polynomien p_i etsiminen

- Määräämättömät kertoimet $\Rightarrow$ Lineaarinen yhtälöryhmä $\Rightarrow$ Gaussin-Jordanin menetelmä

Esimerkki

$$y'' + y' - 2 = 0,$$

missä $y(0) = y'(0) = 1$. Laplace-muunnoksilla

$$s^2 Y - s - 1 + sY - 1 - 2\frac{1}{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + s)Y = \frac{2}{s} + 2 + s$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow Y &= \frac{2}{s(s^2 + s)} + \frac{2}{s^2 + s} + \frac{s}{s^2 + s} \\ &= \frac{2}{s^2(s + 1)} + \frac{2}{s^2 + s} + \frac{1}{s + 1}\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2(s+1)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1} \\ &= \frac{(As+B)(s+1) + Cs^2}{s^2(s+1)} = \frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + B}{s^2(s+1)}\end{aligned}$$

Näin ollen $A + C = 0$, $A + B = 0$ ja $B = 1$, josta $A = -1$ ja $C = 1$. Täten

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön

$$y' + a(x)y = 0$$

ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Ratkaisumenetelmä

- Homogeenisen yhtälön ratkaisu y_H .
- Vakion variointi: Sijoitetaan $y = C(x)y_H$ alkuperäiseen DY:hyn ja ratkaistaan $C(x)$.

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

Lause

Jos homogeeniselle DY:lle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tunnetaan yksikin ratkaisu, voidaan kaikki alkuperäisen DY:n ratkaisut selvittää.

Sarjaratkaisu

Jos $a(x)$ ja $b(x)$ ovat riittävän säännöllisiä, voidaan DY:n

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ratkaisu löytää Taylorin kehitelmän

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

avulla.

Esimerkki 16

Airy'n DY $y'' + xy = 0$ alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.