

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

Lause

Jos homogeeniselle DY:lle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tunnetaan yksikin ratkaisu, voidaan kaikki alkuperäisen DY:n ratkaisut selvittää.

Sarjaratkaisu

Jos $a(x)$ ja $b(x)$ ovat riittävän säännöllisiä, voidaan DY:n

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ratkaisu löytää Taylorin kehitelmän

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

avulla.

Esimerkki 16

Airy'n DY $y'' + xy = 0$ alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Määritelmä

Muotoa

$$y' = g(x)f(y)$$

oleva DY on separoituva.

Separoituvan DY:n ratkaiseminen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(y)} dy = g(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(x) dx + C$$

Esimerkit 19–21

Esimerkki 21:

$$\begin{aligned}ma &= mg - kv^2 \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m}v^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} dv &= dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} dv &= \int dt + C\end{aligned}$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)} dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y} \Leftrightarrow y \, dy = C \, dt \Leftrightarrow \int y \, dy = \int C \, dt.$$

Näin ollen $\frac{1}{2}y^2 = Ct + k$ ja siis

$$y = \sqrt{2Ct + 2k}.$$

Alkuehdosta $y_0 = \sqrt{2k}$ saadaan $k = \frac{y_0^2}{2}$.

Yleistetty ketjusääntö

Jos y ja z ovat x :n funktioita, on

$$\frac{d}{dx}F(y, z) = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Esimerkki

Olkoon $y = \sin x$ ja $z = x^2 + e^x$ sekä $F(y, z) = yz^2 + 3yz$.
Lasketaan $\frac{d}{dx}F(y, z)$.

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

Ratkaisuyrite

Muotoa

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

oleva DY:tä voidaan yrittää tulkita muodossa

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x, y) = 0,$$

jonka ratkaisu on

$$F(x, y) = C.$$

Lause

Jos funktiot f ja g ovat riittävän säännöllisiä, funktio $F(x, y)$, jolle $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

on eksakti, jos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ (ja f ja g ovat riittävän säännöllisiä).

Eksaktin DY:n ratkaiseminen

$$\begin{aligned} f(x, y) + g(x, y)y' &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x, y) &= 0 \\ \Leftrightarrow F(x, y) &= C \end{aligned}$$

Huomautus

Jos yhtälö

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

ei ole eksakti, on toisinaan mahdollista löytää funktio $\mu(x, y)$ (ns. integroiva tekijä), jolla kerrottuna yhtälö

$$f(x, y)\mu(x, y) + g(x, y)\mu(x, y)y' = 0$$

on eksakti.

Mallintamistehtävä

Etsittävä yhtälö sellaiselle käyrälle, joka heijastaa x -akselin suuntaiset säteet origoon.

