

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

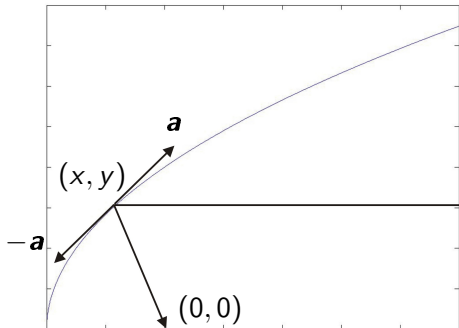
Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

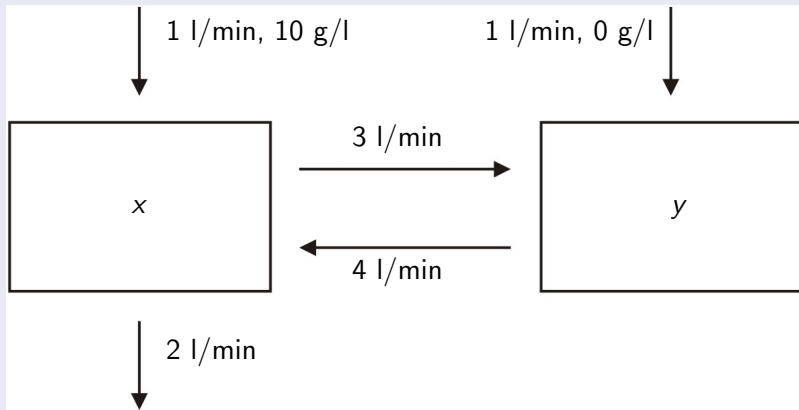
Mallintamistehtävä

Etsittävä yhtälö sellaiselle käyrälle, joka heijastaa x -akselin suuntaiset säteet origoon.

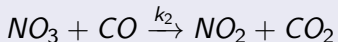
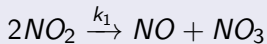


Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



Kemialliset reaktiot



$$\frac{d[NO_3]}{dt} = -k_2[NO_3][CO] + k_1[NO_2]^2$$

$$\frac{d[CO]}{dt} = -k_2[NO_3][CO]$$

$$\frac{d[NO_2]}{dt} = -2k_1[NO_2]^2 + k_2[NO_3][CO].$$

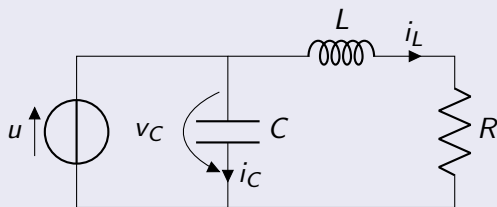
Kemialliset reaktiot

Merkitään $x = [NO_3]$, $y = [CO]$, $z = [NO_2]$, jolloin

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -k_2xy + k_1z^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -k_2xy \\ \frac{dz}{dt} &= -2k_1z^2 + k_2xy \end{cases}$$

Epälineaarinen DY-ryhmä.

RCL-piiri



$$u = i_L + i_C = i_L + C \frac{dv_C}{dt}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_C - Ri_L.$$

Jos merkitään $x_1 = v_C$ ja $x_2 = i_L$, saadaan

$$\begin{cases} C \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + u \\ L \frac{dx_2}{dt} = x_1 - Rx_2 \end{cases}$$

RCL-piiri

Tällöin

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Tulkinta: Piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta t , liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä (alkuehtoineen).

Lause

Lineaarisen, vakiokertoimisen DY-ryhmän yleinen ratkaisu on muotoa

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_0,$$

missä $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ ovat homogeenisen ryhmän ratkaisut ja \mathbf{y}_0 jokin ryhmän yksittäisratkaisu.

Huomautus

Monissa sovelluksissa $\mathbf{f}(t)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{f}(t) = B\mathbf{u}(t),$$

missä B on $n \times m$ -matriisi ja $\mathbf{u}(t)$ $m \times 1$ -vektori.

Tällöin

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota x joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned}x' &= Ax \\ \Leftrightarrow \frac{x'}{x} &= A \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln x &= A \\ \Leftrightarrow \ln x &= At + C_0 \\ \Leftrightarrow x &= Ce^{At},\end{aligned}$$

missä $C = e^{C_0}$.

Laajennus

Reaalifunktioille siis DY:n $x' = Ax$ ratkaisu on $x = Ce^{At}$.
Voidaanko määritellä matriisin eksponenttifunktio e^{tA} siten, että derivaatan ominaisuudet olisivat lähes samat kuin skalaariarvoisille funktioille?

Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$, missä \mathbf{c} on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{c} = Ae^{tA}\mathbf{c} = A\mathbf{x},$$

mikä pitää paikkansa jos $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Huomautus: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$

Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia e^{tA} , vaan $e^{tA}\mathbf{c}$ voikin olla helpompi!

Idea

Jos \mathbf{v} on matriisin A ominaisarvoon λ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$\begin{aligned} e^{tA}\mathbf{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\mathbf{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A - \lambda I)}\mathbf{v} = e^{\lambda t}e^{t(A - \lambda I)}\mathbf{v} \\ &= e^{\lambda t}e^{t(A - \lambda I)}\mathbf{v} \\ &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t(A - \lambda I))^k\mathbf{v} \\ &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k\mathbf{v} \end{aligned}$$

Huomaus

Jos \mathbf{v} on matriisin A (yleistetty) λ :aan liittyvä ominaisvektori, on $(A - \lambda I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$ jostain rajasta m alkaen ja

$$e^{tA} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \mathbf{v}$$

Jos erityisesti \mathbf{v} on varsinainen ominaisvektori (siis yleistetty astetta $m = 1$),

$$e^{tA} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{v}.$$

Yhteenveto

- Homogeenisen DY-ryhmän $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ratkaisu on $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$.
- Etsitään matriisin A (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$
- $e^{tA}\mathbf{v}_i$ voidaan laskea esityksen
$$e^{tA}\mathbf{v}_i = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\mathbf{v}_i = e^{\lambda t}e^{t(A - \lambda I)}\mathbf{v}_i$$
 perusteella.
- Kertoimet c_1, \dots, c_n määräytyvät ehdon $\mathbf{c} = \mathbf{x}(0)$ perusteella.

Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Tähän voidaan soveltaa vakion variointia: Homogeenisen ryhmän ratkaisu $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$ tunnetaan, joten käytetään yritettä $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}(t)$, jolloin

$$\mathbf{x}' = Ae^{tA}\mathbf{c}(t) + e^{tA}\mathbf{c}'(t).$$

Sijoittamalla tämä epähomogeeniseen yhtälöön saadaan

$$Ae^{tA}\mathbf{c}(t) + e^{tA}\mathbf{c}'(t) = Ae^{tA}\mathbf{c}(t) + \mathbf{f},$$

mikä sievenee muotoon

$$e^{tA}\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{c}'(t) = e^{-tA}\mathbf{f}.$$

Epähomogeeninen DY-ryhmä

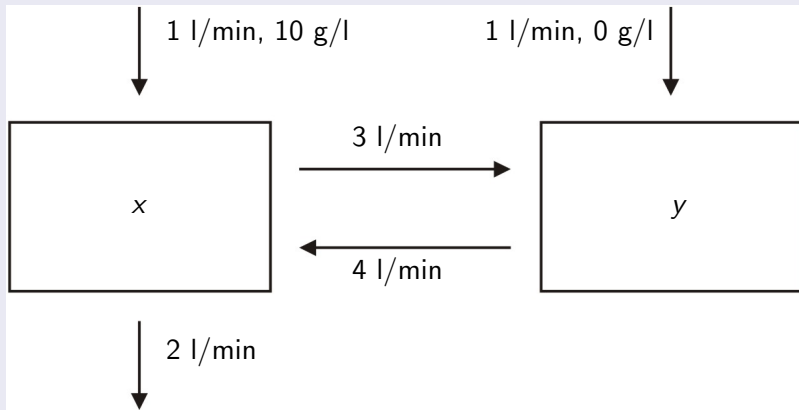
- Täten $\mathbf{c}(t) = \int e^{-tA} \mathbf{f} dt + \mathbf{c}$ ja
- $\mathbf{x} = e^{tA} \int e^{-tA} \mathbf{f} dt + e^{tA} \mathbf{c}$.
- Jos \mathbf{f} on yksinkertainen, myös yrite voi tuottaa yksittäisratkaisun.

Huomautus

- $\mathbf{x}_i(t) = e^{tA} \mathbf{v}_i$ voidaan saada laskematta eksponenttimatriisia e^{tA} , jos \mathbf{v}_i on matriisin A (yleistetty) ominaisvektori.
- Voidaan merkitä $c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t) = X(t) \mathbf{c}$, missä matriisin $X(t)$ sarakkeet ovat $\mathbf{x}_i(t)$ ja $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$.
- Vakion variointi voidaan tehdä muodossa $\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{c}(t)$, josta $\mathbf{c}(t) = \int X(t)^{-1} \mathbf{f} dt + \mathbf{c}$.
- Yleinen ratkaisu on $\mathbf{x} = X(t) \int X(t)^{-1} \mathbf{f} dt + X(t) \mathbf{c}$.

Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{ -\frac{2}{5}, -\frac{1}{20} \right\}$$

Matriisin A ominaisvektorit

$$(A + \frac{2}{5}I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + \frac{1}{20}I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu

Yrite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(vakiovektori), jolloin saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Alkuehdoista saadaan

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

josta $(c_1, c_2) = (\frac{75}{7}, -\frac{530}{7})$.

Ratkaisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{75}{5} e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{530}{7} e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

Esimerkki

