

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

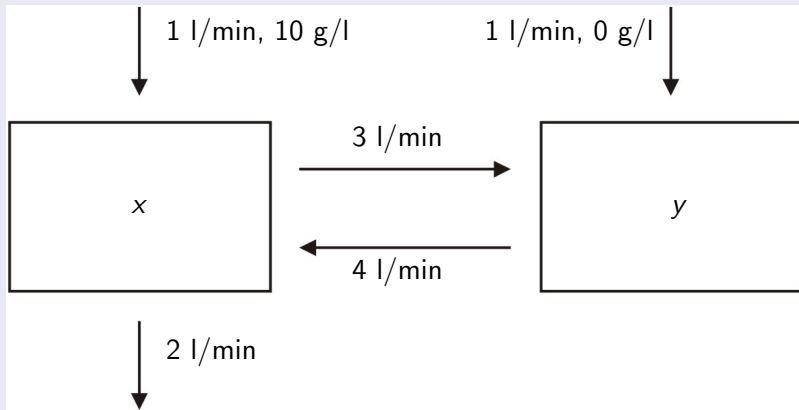
Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Esimerkki

Matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{ -\frac{2}{5}, -\frac{1}{20} \right\}$$

Matriisin A ominaisvektorit

$$\left(A + \frac{2}{5}I\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriisin A ominaisvektorit

$$\left(A + \frac{2}{5}I\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A + \frac{1}{20}I\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu

Yrite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(vakiovektori), jolloin saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Alkuehdoista saadaan

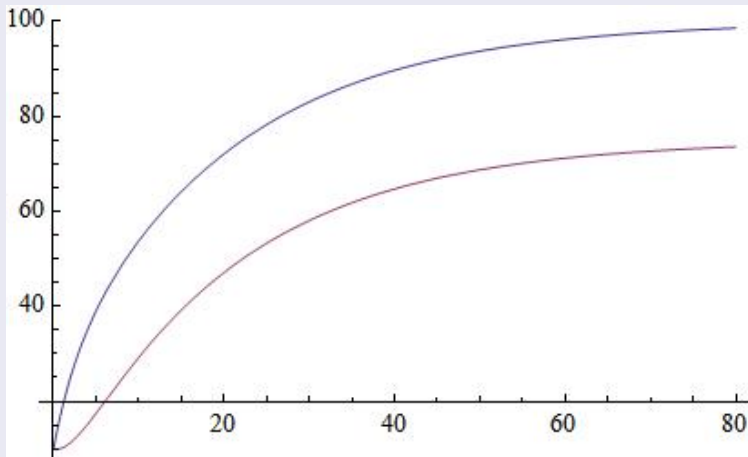
$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

josta $(c_1, c_2) = (\frac{75}{7}, -\frac{530}{7})$.

Ratkaisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{75}{5} e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{530}{7} e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

Esimerkki



Lähtökohta

- Syöte $x(t)$

Lähtökohta

- Syöte $\mathbf{x}(t)$
- Tuloste $\mathbf{y}(t) = \mathcal{S}(\mathbf{x}(t))$

Lähtökohta

- Syöte $\mathbf{x}(t)$
- Tuloste $\mathbf{y}(t) = \mathcal{S}(\mathbf{x}(t))$
- Lineaarisuus

$$\mathcal{S}(a_1\mathbf{x}_1(t) + a_2\mathbf{x}_2(t)) = a_1\mathcal{S}(\mathbf{x}_1(t)) + a_2\mathcal{S}(\mathbf{x}_2(t)).$$

Lähtökohta

- Syöte $\mathbf{x}(t)$
- Tuloste $\mathbf{y}(t) = \mathcal{S}(\mathbf{x}(t))$
- Lineaarisuus

$$\mathcal{S}(a_1\mathbf{x}_1(t) + a_2\mathbf{x}_2(t)) = a_1\mathcal{S}(\mathbf{x}_1(t)) + a_2\mathcal{S}(\mathbf{x}_2(t)).$$

Mahdollisia malleja

- $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, missä \mathbf{A} on vakiomatriisi.

Lähtökohta

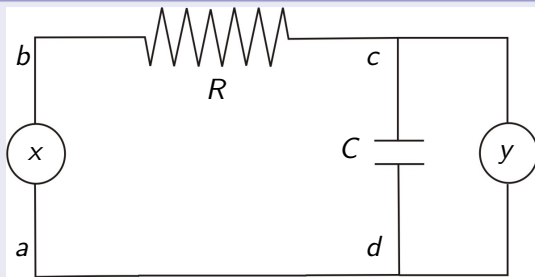
- Syöte $\mathbf{x}(t)$
- Tuloste $\mathbf{y}(t) = \mathcal{S}(\mathbf{x}(t))$
- Lineaarisuus

$$\mathcal{S}(a_1\mathbf{x}_1(t) + a_2\mathbf{x}_2(t)) = a_1\mathcal{S}(\mathbf{x}_1(t)) + a_2\mathcal{S}(\mathbf{x}_2(t)).$$

Mahdollisia malleja

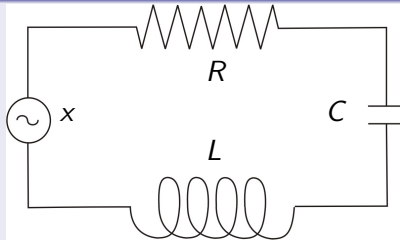
- $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, missä \mathbf{A} on vakiomatriisi.
- Muuttuvatilainen systeemi, jossa tilavektori \mathbf{s} toteuttaa yhtälön $\mathbf{s}' = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{B}\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{D}\mathbf{x}$.

Esimerkki



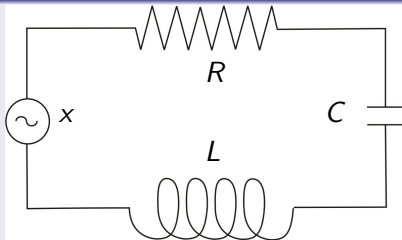
$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y$$

Esimerkki



Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$.

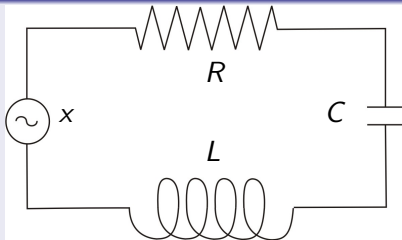
Esimerkki



Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$. Tällöin

$$x = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$$

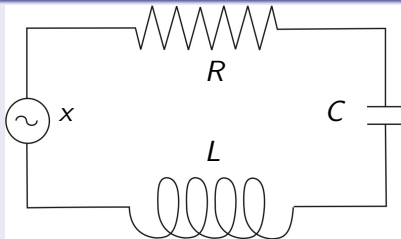
Esimerkki



Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$. Tällöin $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ ja

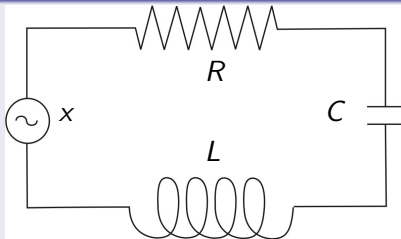
$$x' = RI' + \frac{1}{C}I + L\frac{d^2I}{dt^2} = Ry' + \frac{1}{C}y + Ly''$$

Esimerkki



Jos taas kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y , on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

Esimerkki



Jos taas kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y , on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy''$$

Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä

Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla

$$0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots$$

Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä

Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla

$$0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots$$

Yllä olevasta yhtälöstä saadaan näillä oletuksilla

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \dots a_0Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \dots + b_0X,$$

Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä

Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla

$$0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots$$

Yllä olevasta yhtälöstä saadaan näillä oletuksilla

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \dots + a_0Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \dots + b_0X,$$

josta

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)Y = (s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)X$$

Siirtofunktio

Jos järjestelmää voidaan kuvata vakio kertoimisilla lineaarisilla differentiaaliyhtälöillä, on siirtofunktio $G(s)$ seuraavaa muotoa:

$$Y(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{\underbrace{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}_{G(s)}} X(s)$$

Määritelmä

Lineaarinen järjestelmä on *stabiili*, jos syötteen $x(t)$ ollessa rajoitettu on tuloste $y(t)$ (output) myös rajoitettu.

Määritelmä

Lineaarinen järjestelmä on *stabiili*, jos syötteen $x(t)$ ollessa rajoitettu on tuloste $y(t)$ (output) myös rajoitettu. Toisin sanoen:
 $|x(t)| \leq M_1 \rightarrow |y(t)| \leq M_2$.

Kriteeri

Jos $Y(s) = G(s)X(s)$, $y = \mathcal{L}^{-1}[Y]$, $g = \mathcal{L}^{-1}[G]$ ja $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X]$, on

$$y(t) = (g * x)(t) = \int_0^t g(u)x(t-u) du$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$,

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right|$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)| du \end{aligned}$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)| du \leq \int_0^t |g(u)| M_1 du \end{aligned}$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)| du \leq \int_0^t |g(u)| M_1 du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)| du \end{aligned}$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)| du \leq \int_0^t |g(u)| M_1 du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)| du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)| du \end{aligned}$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)| du \leq \int_0^t |g(u)| M_1 du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)| du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)| du \end{aligned}$$

Jos

$$\int_0^\infty |g(u)| du < \infty,$$

on myös $y(t)$ rajoitettu.

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)| du \leq \int_0^t |g(u)| M_1 du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)| du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)| du \end{aligned}$$

Jos

$$\int_0^\infty |g(u)| du < \infty,$$

on myös $y(t)$ rajoitettu. Voidaan osoittaa, että tämä on myös välttämätön ehto.

Siirtofunktion hajotelma

Koska siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

on rationaalifunktio, on sillä olemassa osamurtohajotelma

$$G(s) = a(s) + \frac{p(s)}{q(s)},$$

missä a on polynomi ja $\deg(p) < \deg(q)$.

Siirtofunktion hajotelma

Koska siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

on rationaalifunktio, on sillä olemassa osamurtohajotelma

$$G(s) = a(s) + \frac{p(s)}{q(s)},$$

missä a on polynomi ja $\deg(p) < \deg(q)$. Käänteismuunnos $g(t)$ saadaan osamurtohajotelmasta.

Käänteismuunnos

Jos $\deg(p) < \deg(q)$, on

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{c, \lambda, k} \frac{c}{(s - \lambda)^k},$$

missä $c, \lambda \in \mathbb{C}$.

Käänteismuunnos

Jos $\deg(p) < \deg(q)$, on

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{c, \lambda, k} \frac{c}{(s - \lambda)^k},$$

missä $c, \lambda \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - \lambda)^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t}$$

Huomautus

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$,

Huomautus

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$, mutta lähestyy nopeasti kohti nollaa, jos $\alpha < 0$.

Huomautus

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$, mutta lähestyy nopeasti kohti nollaa, jos $\alpha < 0$. Tämän vuoksi integraali

$$\int_0^{\infty} t^{k-1} e^{\lambda t} dt$$

suppenee tarkalleen silloin kun $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

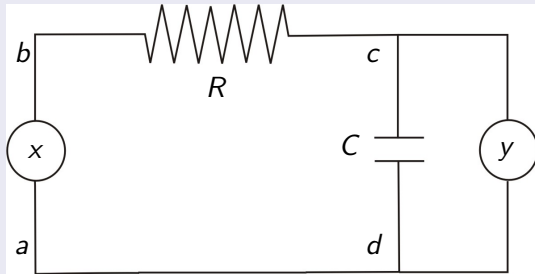
Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

Johtopäätös

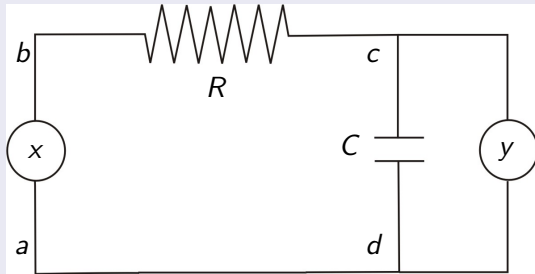
Lineaarinen systeemi on stabiili tarkalleen silloin kun sen siirtofunktion napojen reaaliosat ovat negatiivisia.

Esimerkki



$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y,$$

Esimerkki



$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y,$$

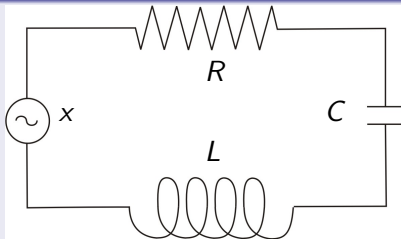
Josta $X(s) = RCsY(s) + Y(s) = (RCs + 1)Y(s)$ ja

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{RCs + 1}}_{G(s)} X(s).$$

Esimerkki

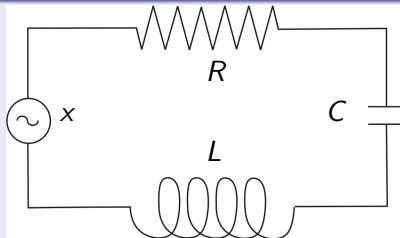
Siirtofunktion ainoa napa on $s = -\frac{1}{RC} < 0$, joten systeemi on stabiili.

Esimerkki



Jos kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y , on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

Esimerkki



Jos kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y , on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy'',$$

Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2Y,$$

Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2Y,$$

mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$.

Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2Y,$$

mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$.
Siirtofunktion navat ovat

$$\frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2Y,$$

mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$.
Siirtofunktion navat ovat

$$\frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Reaalisten parametriarvojen vuoksi $(RC)^2 - 4LC < (RC)^2$, joten tässäkin tapauksessa siirtofunktion nimittäjän nollakohtien reaalisat ovat negatiiviset.