Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Diracin δ-funktio

"Määritelmä"

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0 \\ \infty, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

Määritelmä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\, dx = f(x_0).$$

Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}[\delta(t - x_0)](s)$$

Polynomien käänteismuunnos

Koska

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\,dt = 1,$$

on $\mathcal{L}[\delta'(t)](s) = s$, $\mathcal{L}[\delta''(t)](s) = s^2$, jne.
Näin ollen polynomien käänteiset Laplace-muunnokset sisältävät delta-piikin derivaattoja eivätkä näiden integraalit ole rajoitettuja.

Stabiilisuus

Impulssivaste

Impulssivaste tarkoittaa järjestelmän tulostetta kun syötteenä on Diracin delta-funktio. Syötteen ollessa $x(t) = \delta(t)$ saadaan $y(t) = (g * \delta)(t) = g(t)$.

Johtopäätös

Lineaarinen järjestelmä on stabiili tarkalleen silloin sen impulssivasteelle $g(t)$ pätee

$$\int_0^\infty |g(t)| \, dt < \infty$$

Stabiilisuus

Askelvaste

Askelvaste tarkoittaa tulostetta, kun syötteenä on Heavisiden askelfunktio:

$$y(t) = (g * H)(t) = \int_0^t g(u)H(t-u)\,du = \int_0^t g(u)\,du.$$

Näin ollen impulssivaste on askelvasteen derivaatta.

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}, \end{aligned}$$

missä on merkitty $z = e^{sT}$.

Diskreetit lineaariset järjestelmät

Määritelmä

Jonon x_0, x_1, x_2, ... Z-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ Z-muunnos kun T on kiinnitetty.

Esimerkki

jonolle a^n on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a},$$

kun $|a| < |z|$.

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= z(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_0) = z\mathcal{Z}[f_n] - f_0 z,\end{aligned}$$

Ominaisuuksia

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n+2} = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= z^2 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_1 z^{-1} - f_0) = z^2 \mathcal{Z}[f_n] - f_1 z - f_0 z^2,
\end{aligned}
$$

jne.

Differenssiyhtälöt

Määritellään $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, jolloin

$$\Delta^2 y_n = y_{n-2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

ja

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_n &= y_{n+3} - 2y_{n+2} + y_{n+1} - (y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) \\ &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n \end{aligned}$$

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = x_{n+l} + b_{l-l}x_{n+l-1} + \ldots + b_0 x_n$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän.

Differenssiyhtälöt

Olettaen jonojen alkutermit nolliksi, $\mathcal{Z}$-muunnoksilla saadaan $Y(z) = G(z)X(z)$. Stabiilisuusehtona on että funktion $G(z)$ navat toteuttavat $|z| < 1$.

Esimerkki

$$2y_{n+2} + 3y_{n+1} - 2y_n = x_{x+1} + 2x_n$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1,$$

josta Z-muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä $\mathcal{Z}[F_n](z) = \widehat{F}(z)$) saadaan

$$z^2\widehat{F}(z) - z - z^2 = z\widehat{F}(z) - z + \widehat{F}(z),$$

josta

$$(z^2 - z - 1)\widehat{F}(z) = z^2$$

ja

$$\widehat{F}(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}}$$

Esimerkki

Osamurtohajotelmilla (merk. $u = \frac{1}{z}$) saadaan

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(z) &= \frac{1}{1-u-u^2} \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\frac{1}{z}-\alpha} - \frac{1}{\frac{1}{z}-\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{z}{1-\alpha z} - \frac{z}{1-\beta z}\right) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\alpha^{-1}\frac{z}{\alpha^{-1}-z} - \beta^{-1}\frac{z}{\beta^{-1}-z}\right)
\end{aligned}$$

, missä $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ja $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Käänteinen Z-muunnos

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\beta - \alpha}(\alpha^{-1}\alpha^{-n} + \beta^{-1}\beta^{-n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big). \end{aligned}$$

Huomautus

- Ordinary Differential Equations: ODE, DE (suom. DY)
- Partial Differential Equations: PDE (suom. ODY)

Esimerkkejä

- Einsteinin kenttäyhtälöt
- Schrödingerin yhtälö, esim.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r,t)\right)\psi(r,t),$$

missä

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Huomioita

- ODY:t esiintyvät yleisesti monilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla
- Harvoja eksplisiittisiä ratkaisumenetelmiä
- Yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo reunaehdoilla ei itsestään selvää
- Numeerinen menetelmä: Finite Elements Method (FEM)

Esimerkkejä

- Aaltoyhtälö
- Fick I-II

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Yksinkertainen ODY

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\psi(x,y) = f(x,y)$$

Lineaarinen tapaus

- PDE on lineaarinen, jos ψ_1 ja ψ_2 ovat ratkaisuja $\Rightarrow$ $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ on ratkaisu.
- Tyypillinen yritelmä lineaariselle $\psi(x,y) = f(x)g(x)$
- Lineaarikombinaatio yritelmistä reunaehdot huomioon ottaen.