Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Huomautus

- Ordinary Differential Equations: ODE, DE (suom. DY)
- Partial Differential Equations: PDE (suom. ODY)

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Huomautus

- Ordinary Differential Equations: ODE, DE (suom. DY)
- Partial Differential Equations: PDE (suom. ODY)

Esimerkkejä

- Einsteinin kenttäyhtälöt

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Huomautus

- Ordinary Differential Equations: ODE, DE (suom. DY)
- Partial Differential Equations: PDE (suom. ODY)

Esimerkkejä

- Einsteinin kenttäyhtälöt
- Schrödingerin yhtälö, esim.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r,t)\right)\psi(r,t),$$

Huomautus

- Ordinary Differential Equations: ODE, DE (suom. DY)
- Partial Differential Equations: PDE (suom. ODY)

Esimerkkejä

- Einsteinin kenttäyhtälöt
- Schrödingerin yhtälö, esim.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r,t)\right)\psi(r,t),$$

missä

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Huomioita

- ODY:t esiintyvät yleisesti monilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla

Huomioita

- ODY:t esiintyvät yleisesti monilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla
- Harvoja eksplisiittisiä ratkaisumenetelmiä

Huomioita

- ODY:t esiintyvät yleisesti monilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla
- Harvoja eksplisiittisiä ratkaisumenetelmiä
- Yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo reunaehdoilla ei itsestään selvää

Huomioita

- ODY:t esiintyvät yleisesti monilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla
- Harvoja eksplisiittisiä ratkaisumenetelmiä
- Yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo reunaehdoilla ei itsestään selvää
- Numeerinen menetelmä: Finite Elements Method (FEM)

Huomioita

- ODY:t esiintyvät yleisesti monilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla
- Harvoja eksplisiittisiä ratkaisumenetelmiä
- Yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo reunaehdoilla ei itsestään selvää
- Numeerinen menetelmä: Finite Elements Method (FEM)

Esimerkkejä

- Aaltoyhtälö

Huomioita

- ODY:t esiintyvät yleisesti monilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla
- Harvoja eksplisiittisiä ratkaisumenetelmiä
- Yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo reunaehdoilla ei itsestään selvää
- Numeerinen menetelmä: Finite Elements Method (FEM)

Esimerkkejä

- Aaltoyhtälö
- Fick I-II

Yksinkertainen ODY

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\psi(x,y) = f(x,y)$$

Lineaarinen tapaus

- PDE on lineaarinen, jos ψ_1 ja ψ_2 ovat ratkaisuja $\Rightarrow$ $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ on ratkaisu.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Yksinkertainen ODY

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\psi(x,y) = f(x,y)$$

Lineaarinen tapaus

- PDE on lineaarinen, jos ψ_1 ja ψ_2 ovat ratkaisuja $\Rightarrow$ $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ on ratkaisu.
- Tyypillinen yritelmä lineaariselle $\psi(x,y) = f(x)g(x)$

Yksinkertainen ODY

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\psi(x, y) = f(x, y)$$

Lineaarinen tapaus

- PDE on lineaarinen, jos ψ_1 ja ψ_2 ovat ratkaisuja $\Rightarrow$ $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ on ratkaisu.
- Tyypillinen yritelmä lineaariselle $\psi(x, y) = f(x)g(x)$
- Lineaarikombinaatio yritelmistä reunaehdot huomioon ottaen.

Eulerin menetelmä

$$y' = f(t, y).$$

Eulerin menetelmä

$$y' = f(t, y).$$

Funktion arvoja y_0, y_1, y_2, ... lasketaan aikoina t_0, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, ... $t_{i+1} = t_i + h$ siten että funktio y korvataan lineaarisella approksimaatiolla:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(t_i) = y_i + h \cdot f(t_i, y_i).$$

Eulerin menetelmä

$$y' = f(t, y).$$

Funktion arvoja y_0, y_1, y_2, ... lasketaan aikoina t_0, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, ... $t_{i+1} = t_i + h$ siten että funktio y korvataan lineaarisella approksimaatiolla:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(t_i) = y_i + h \cdot f(t_i, y_i).$$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y_0 = y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella $y_1 = 1 + h$.

Runge-Kutta -menetelmä(t)

- $k_1 = f(t_i, y_i)h$
- $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$
- $k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Runge-Kutta -menetelmä(t)

- $k_1 = f(t_i, y_i)h$
- $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$
- $k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella

$$y_1 = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4$$

Runge-Kutta -menetelmä(t)

- $k_1 = f(t_i, y_i)h$
- $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$
- $k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella

$$y_1 = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 \approx e^h$$

Huomautus

Mainitut numeeriset menetelmät toimivat myös DY-ryhmille

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

Huomautus

Mainitut numeeriset menetelmät toimivat myös DY-ryhmille

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

Toisinaan voidaan uusia funktiolta lisäämällä pienentää differentiaaliyhtälöiden kertalukua.

Esimerkki

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x'' + 2x' + 3x = 5t$$

voidaan sijoituksella $x' = y$ muuntaa DY-pariksi.

Esimerkki

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x'' + 2x' + 3x = 5t$$

voidaan sijoituksella $x' = y$ muuntaa DY-pariksi. Tällöin siis $x'' = y'$, joten $y' + 2y + 3x = 5t$ ja $x' = y$,

Esimerkki

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x'' + 2x' + 3x = 5t$$

voidaan sijoituksella $x' = y$ muuntaa DY-pariksi. Tällöin siis $x'' = y'$, joten $y' + 2y + 3x = 5t$ ja $x' = y$, josta yhtäpitävä DY-pari on

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -3x - 2y - 5t \end{cases}$$

Autonomiset DY-parit

Määritelmä

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= f_1(x, y) \\ y'(t) &= f_2(x, y) \end{cases}$$

on autonominen, jos muuttuja t ei esiinny oikean puolen termeissä.

Autonomiset DY-parit

Määritelmä

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) & = & f_1(x,y) \\ y'(t) & = & f_2(x,y) \end{cases}$$

on autonominen, jos muuttuja t ei esiinny oikean puolen termeissä.

Ratakäyrät

Autonomiselle parille on voimassa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

Autonomiset DY-parit

Määritelmä

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) & = & f_1(x,y) \\ y'(t) & = & f_2(x,y) \end{cases}$$

on autonominen, jos muuttuja t ei esiinny oikean puolen termeissä.

Ratakäyrät

Autonomiselle parille on voimassa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja sanotaan ratakäyriksi.

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= x - y \\ y'(t) &= x + y \end{cases}$$

on autonominen.

Ratakäyrät

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) & = & x - y \\ y'(t) & = & x + y \end{cases}$$

on autonominen. Ratakäyrien DY on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= -2x^2 \\ y'(t) &= -\frac{1}{2}xy \end{cases}$$

on autonominen. Alkuehdot $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Lotka-Volterra -malli

Alfred J. Lotka (1880–1949)

Vito Volterra (1860–1940)

Lotka-Volterra -malli

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Lotka-Volterra -malli

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0,0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0,0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Ratakäyrien DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y}$$

Lotka-Volterra -malli

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0, 0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Ratakäyrien DY

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C \end{aligned}$$

Lotka-Volterra -malli

Mallin DY-pari

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Tasapainopisteet: $(0,0)$ ja $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

Ratakäyrien DY

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha \ln y - \beta y &= \delta x - \gamma \ln x + C \end{aligned}$$

Ratkaisut syklisiä: On olemassa T, jolle $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$.

Lotka-Volterra -malli

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) &= \quad \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y,$$

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y,$$

josta

$$0 = \ln \frac{x(T)}{x(0)} = \int_0^T \frac{x'}{x}\, dt = \int_0^T (\alpha - \beta y)\, dt = \alpha T - \beta \int_0^T y\, dt,$$

Lotka-Volterra -malli

Populaation keskiarvo

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y,$$

josta

$$0 = \ln \frac{x(T)}{x(0)} = \int_0^T \frac{x'}{x}\, dt = \int_0^T (\alpha - \beta y)\, dt = \alpha T - \beta \int_0^T y\, dt,$$

joten populaation y keskiarvo jakson T aikana on

$$\mathbb{E}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T y\, dt = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Lotka-Volterra -malli

Populaation keskiarvot

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x) &= \frac{\gamma}{\delta} \\ \mathbb{E}(y) &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Lotka-Volterra -malli

Populaation keskiarvot

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x) &= \frac{\gamma}{\delta} \\ \mathbb{E}(y) &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

DY-pari + ulkopuolinen toimija

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - \beta xy - ex \\ y'(t) = -\gamma y + \delta xy - ey \end{cases}$$

Lotka-Volterra -malli

Populaation keskiarvot

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x) &= \frac{\gamma}{\delta} \\ \mathbb{E}(y) &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

DY-pari + ulkopuolinen toimija

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x - \beta xy - ex \\ y'(t) &= -\gamma y + \delta xy - ey \end{cases}$$

Uudet keskiarvot

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x) &= \frac{\gamma+e}{\delta} \\ \mathbb{E}(y) &= \frac{\alpha-e}{\beta} \end{cases}$$

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.
- Bernoullin DY $y' + p(x)y = q(x)y^a$ muuttuu lineaariseksi sijoituksella $z = y^{1-a}$ $(a \neq 1)$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.
- Bernoullin DY $y' + p(x)y = q(x)y^a$ muuttuu lineaariseksi sijoituksella $z = y^{1-a}$ $(a \neq 1)$.
- Käänteisfunktion ratkaiseminen: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

Sekalaisia menetelmiä

- $y' = f(y/x)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = y/x$.
- $y' = f(ax + by)$ muuttuu separoituvaksi sijoituksella $z = ax + by$.
- Bernoullin DY $y' + p(x)y = q(x)y^a$ muuttuu lineaariseksi sijoituksella $z = y^{1-a}$ $(a \neq 1)$.
- Käänteisfunktion ratkaiseminen: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.
- Eulerin DY $x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$ muuttuu sijoituksella $x = e^t$, $y(x) = y_1(\ln x)$ vakiokertoimiseksi.

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$y'' = f(y)$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(y) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y'
\end{aligned}
$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$\begin{aligned} & y'' = f(y) \\ \Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y' \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}(y')^2 = 2\frac{d}{dx}\int f(y)\,dy \end{aligned}$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(y) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y' \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}(y')^2 = 2\frac{d}{dx}\int f(y)\,dy \\
\Leftrightarrow\quad & (y')^2 = 2\int f(y)\,dy + C
\end{aligned}
$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(y) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y''y' = 2f(y)y' \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}(y')^2 = 2\frac{d}{dx}\int f(y)\,dy \\
\Leftrightarrow\quad & (y')^2 = 2\int f(y)\,dy + C \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C}
\end{aligned}
$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2}$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2}$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s'$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$,

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$, josta merkinnöillä $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ saadaan $C = v_0^2 - \frac{2k}{s_0}$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$, josta merkinnöillä $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ saadaan $C = v_0^2 - \frac{2k}{s_0}$ ja

$$s' = \sqrt{\frac{2k}{s} + v_0^2 - \frac{2k}{s_0}}.$$

Liike painovoimakentässä

$$ma = -G\frac{mM}{s^2} \Leftrightarrow ms'' = -G\frac{mM}{s^2}$$

Merkitään $k = GM$, jolloin saadaan

$$s'' = -\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow 2s's'' = -2\frac{k}{s^2}s' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s}.$$

Integrointi antaa yhtälön $(s')^2 = \dfrac{2k}{s} + C$, josta merkinnöillä $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ saadaan $C = v_0^2 - \frac{2k}{s_0}$ ja

$$s' = \sqrt{\frac{2k}{s} + v_0^2 - \frac{2k}{s_0}}. \quad \text{Separoituva!}$$

Liike painovoimakentässä

Koska $v = s'$, voidaan yhtälö

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

kirjoittaa muotoon

$$v^2 - 2\frac{GM}{s} = v_0^2 - 2\frac{GM}{s_0}$$

Liike painovoimakentässä

Koska $v = s'$, voidaan yhtälö

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

kirjoittaa muotoon

$$v^2 - 2\frac{GM}{s} = v_0^2 - 2\frac{GM}{s_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{s} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{s_0}$$

Liike painovoimakentässä

Koska $v = s'$, voidaan yhtälö

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

kirjoittaa muotoon

$$v^2 - 2\frac{GM}{s} = v_0^2 - 2\frac{GM}{s_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{s} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{s_0}$$

Energian säilymislaki:

$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{s}$ ei muutu.

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Yhtälö $y'' = f(y)$

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$.

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde),

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa)

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$.
Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa) ja $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (gravitaatiovakio)

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$. Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa) ja $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (gravitaatiovakio) saadaan ehdoksi

$$v_0 \geq 11,19 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Liike painovoimakentässä

$$(s')^2 = 2\frac{k}{s} + v_0^2 - 2\frac{k}{s_0}$$

Nopeus $v = s'$ ei saa koskaan arvoa 0, jos $v_0^2 - \frac{2k}{s_0} \geq 0$. Näin käy, jos $v_0^2 \geq \frac{2k}{s_0} = \frac{2GM}{s_0}$. Sijoittamalla $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde), $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa) ja $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (gravitaatiovakio) saadaan ehdoksi

$$v_0 \geq 11,19 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad \text{(pakonopeus)}$$