

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 1, 26.2.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Olkoot $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ ja $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $R : A \rightarrow B$ ja $S : B \rightarrow C$ seuraavasti määritellyjä relaatioita

$$R = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, b)\}, \quad S = \{(a, \alpha), (a, \beta), (c, \gamma), (c, \delta), (d, \delta)\}.$$

Piirrä relaation R AB -tasoesitys (esim. pikselikuviona) ja nuolikaaviot tehtävän molemmista relaatioista ja selvitä mitkä ovat relaatioiden R ja S määrittely- ja arvojoukot.

2. Muodosta edellisen tehtävän perusteella relaatiot $S \circ R$, R^{-1} , S^{-1} ja $(S \circ R)^{-1}$. Onko jokin edellisissä tehtävissä esiintyvä relaatio funktio?
3. Määritellään joukossa $\{a, b, c, d\}$ binäärinen relaatio

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d)\}.$$

Piirrä relaation R nuolikaavioesitys. Onko R ekvivalenssirelaatio? Entä osittainen järjestys?

4. Olkoon $1 \leq k < n$. Määritellään n -pituisten bittijonojen joukossa relaatio $\sim$ seuraavasti: $w_1 \sim w_2$ tarkalleen silloin kun jonot w_1 ja w_2 eroavat toisistaan korkeintaan k :ssa eri kohdassa. Jos esim. $k = 2$ ja $n = 5$, on $00000 \sim 11000$, koska jonot eroavat vain kahdessa eri kohdassa, mutta $00000 \sim 11100$ ei ole voimassa, koska jonot eroavat toisistaan jo kolmessa eri kohdassa.

Onko $\sim$ refleksiivinen? Entä symmetrinen? Entä antisymmetrinen? Entä transitiiivinen?

5. Osoita, että lukuteoreettinen kongruenssin ekvivalenssiluokkien yhteen- ja kertolasku $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ ja $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ ovat riippumattomia edustajan valinnasta. Ohje: On osoitettava, että jos a ja a_1 ovat saman luokan edustajia (siis $a \equiv_n a_1$) ja myös b ja b_1 saman luokan edustajia, niin myös $a + b$ ja $a_1 + b_1$ ovat saman luokan edustajia. Kertolaskua varten on osoitettava, että ab ja a_1b_1 ovat saman luokan edustajia.
6. Laadi joukolle $\mathbb{Z}_5$ yhteelaskutaulu samoin kuin luentoruuduissa 2 16/17 on esitetty eräälle grupoidille. voit jättää luokan $\bar{0}$ pois yhteenlaskutaulusta.
7. Laadi joukolle $\mathbb{Z}_6$ kertolaskutaulu. Voit jättää luokat $\bar{0}$ ja $\bar{1}$ pois.
8. Olkoon $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Etsi relaation R määrittely- ja arvojoukot. Etsi jokin esitystapa relaatiolle R^{-1} .
9. Onko edellisen tehtävän relaatio funktio? Entä onko se surjektio? Entä injektio? Etsi sellaiset $A \subset R$ ja $B \subset R$, että edellisen tehtävän relaatiosta tulee näihin joukkoihin rajoitettuna bijektiivinen funktio.