

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 2, 5.3.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Osoita, että reaalilukuväli $[0, 1)$ on yhtä mahtava välin $(0, 1)$ kanssa. Ohje: Bijektion ei tarvitse olla jatkuva tai edes millään yksinkertaisella lausekkeella määritelty funktio. Voit esimerkiksi määritellä bijektion siten, että vain rationaaliluvut välillä $[0, 1)$ muuttuvat ja irrationaaliluvut pysyvät ennallaan. Vihje: Hilbertin hotelli.
2. Osoita, että jokainen joukon $\mathbb{N}$ ääretön osajoukko on yhtä mahtava joukon $\mathbb{N}$ kanssa.
3. Oletetaan, että on olemassa injektio $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Osoita, että A on joko äärellinen tai numeroituva. Vihje: Voit nojautua edellisen tehtävän väitteeseen.
4. Olkoon S kommutatiivinen, supistuva monoidi. Osoita, että joukossa $S \times S$ määritelty relaatio $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ on ekvivalenssirelaatio.
5. Käytetään edellisen tehtävän ekvivalenssiluokista merkintää $[(a, b)]$, ja määritellään algebrallinen rakenne G , jossa alkioina ovat ekvivalenssiluokat $[(a, b)]$ ja operaationa $[(a, b)] * [(c, d)] = [(ac, bd)]$. Onko funktio $f : S \rightarrow G$, $f(a) = [(a, 1)]$ injektio?
6. Selvitä mikä ekvivalenssiluokka on edellisessä tehtävässä neutraalialkio operaation $*$ suhteen. Onko jokaisella ekvivalenssiluokalla käänteisalkio operaation $*$ suhteen? Miten tämä ja tehtävät 4 ja 5 liittyvät puoliryhmän $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, 0)$ laajentamiseksi ryhmäksi $(\mathbb{Z}, +, 0)$ tai puoliryhmän $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ laajentamiseksi ryhmäksi $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$?
7. Liitetään reaalilukujen joukkoon alkio $-\infty$ ja sovitaan, että $-\infty < x$ ja että $-\infty + x = -\infty$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Määritellään uudeksi yhteenlaskuksi $x \oplus y = \max\{x, y\}$ ja uudeksi kertolaskuksi $x \otimes y = x + y$. Tuleeko joukosta $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ uuden laskutoimituksen suhteen $\otimes$ suhteen Abelin ryhmä? Entä uuden laskutoimituksen $\oplus$ suhteen monoidi? Toteutuuko $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$ aina?
8. Laadi symmetriselle ryhmälle S_3 kertotaulu. Merkitse ryhmän alkioita sykli-merkinnöillä (1) , (12) , (13) , (23) , (123) , (132) .
9. Mitkä edellisen tehtävän ryhmän alkiot riittävät generoimaan koko ryhmän? Löytyykö ryhmästä S_3 jokin epätriviaali (muu kuin koko S_3 ja $\{(1)\}$) ryhmäoperaation suhteen suljettu joukko?