Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Älä käytä demotehtävissä tekoälyä, vaan omaasi

Demonstraatio 3, 12.3.2026

1. Millaisen aliryhmän alkio $(13) \in S_3$ generoi? onko se normaali aliryhmä? Ohje: Selvitä normaalius tarkistamalla onko $gH = Hg$ aina, kun $g \in S_3$. Käytä edellisen demokerran kertolaskutaulua

2. Olkoon $H = \langle (13) \rangle$ edellisen tehtävän aliryhmä. Selvitä montako sivuluokkaa aliryhmällä H on.

3. Olkoon H kuten edellä. Määritellään ryhmässä S_3 relaatio $a \equiv b$ ehdolla $a^{-1}b \in H$. (**Korjattu 8.3.**) Onko tämä relaatio ekvivalenssirelaatio? Entä kongruenssi?

4. Olkoon H kuten aiemmin. Esitä esimerkki tilanteesta (mikäli sellainen on olemassa), jossa sivuluokkien aH ja bH tulo ei ole riippumaton edustajan valinnasta.

5. Osoita, että permutaatioryhmän S_3 aliryhmä $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$ on normaali. Ohje: Käytä edellisen demokerran kertolaskutaulua.

6. Millainen on tekijäryhmä S_3/A_3? Ohje: Selvitä aluksi Lagrangen lauseen avulla kuinka monta alkiota tekijäryhmässä on. Tekijäryhmän alkiot ovat sivuluokkia gA_3, missä $s \in S_3$. Näiden kertolasku määritellään $g_1A_3 \cdot g_2A_3 = g_1g_2A_3$. Jos $g \in A_3$, on $gA_3 = A_3$. Laske ainakin joitain tuloja $g_1A_3 \cdot g_2A_3$. Voit käyttää edellisen demokerran kertolaskutaulua.

7. Totea, että $\overline{2} \in \mathbb{F}_{11}$ generoi kunnan $\mathbb{F}_{11}$ multiplikatiivisen ryhmän. Ohje: Totea, että kaikki kunnan $\mathbb{F}_7$ nollasta eroavat alkiot saadaan luokan $\overline{2}$ potensseina $\overline{2}^0$, $\overline{2}^1$, $\overline{2}^2$, jne.

8. Olkoon γ syklisen ryhmän C generaattori. Kuinka monta ryhmäoperaatiota (ryhmän kertolaskua) riittää γ^{2026} laskemiseksi? Ohje: Käytä luennolla esiteltyä peräkkäisten neliöimisten menetelmää.

9. Selvitä onko polynomi $x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ jaoton. Ohje: Mieti mitä astetta tekijät voisivat olla ja mitä jaollisuus tarkoittaisi nollakohtien osalta.