Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 4, 19.3.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Muodosta osa 8 alkion kunnan kertotaulusta. Ohje: Alkukuntana on $\mathbb{F}_2$, ja tälle on löydettävä 3. asteen laajennus. Koska $x^3 + x + 1$ on jaoton yli kunnan $\mathbb{F}_2$ (miksi?), voidaan kahdeksan alkion kunta muodostaa tekijäkonstruktiolla $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$. Ihanteen $I = \langle x^3 + x + 1\rangle$ sivuluokkien edustajiksi voidaan valita $p(x) + I$, missä $p(x)$ on korkeintaan toisen asteen polynomi yli kunnan $\mathbb{F}_2[x]$. Mitä tällöin ovat $(1 + x + x^2 + I)(1 + x^2 + I)$, $(x + x^2 + I)(1 + x^2 + I)$ ja $(1 + x + I)(1 + x + I)$? Ohje: $p(x) + I = I$ aina jos $p(x) \in I$.

2. Olkoon $q \neq 1$. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

   aina kun $n \in \mathbb{N}$.

3. Olkoon $x \geq -1$. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

   aina kun $n \in \mathbb{N}$.

4. Piirrä seuraavista propositiologiikan kaavoista puukaavio (kts. luentoruudut)

   a) $(x_1 \wedge (\neg x_2 \wedge x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge (x_2 \wedge \neg x_3))$

   b) $(x_1 \wedge x_3) \wedge (x_2 \vee (\neg x_1 \vee \neg x_3))$

5. Totuusarvotus α määritellään seuraavasti: $\alpha(x_1) = 1$, $\alpha(x_2) = 1$, $\alpha(x_3) = 0$. Määritä edellisen tehtävän propositioiden totuusarvot arvotuksessa α. Onko olemassa sellaista totuusarvotusta, että edellisen tehtävän propositiosta tulisi tosi?

6. Määritellään lyhennysmerkintä $x \to y$ kaavana $\neg x \vee y$ (vrt. luennot). Käytä Boolen algebran ominaisuuksia ja sievennä kaava $(x \to (y \to x)$ mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Korvaa ensin implikaatiot negaation ja disjunktion avulla esitetyllä kaavalla.

7. Kirjoita 3×3 vierusmatriisi luennon 11.3. esimerkkigraafille, jossa esiintyy kuusi suomalaista kaupunkia, rajoittautumalla kaupunkeihin Turku, Tampere, Vaasa. Käytä numerointia etelästä pohjoiseen ja laske vierusmatriisin toinen potenssi A^2 tavallisen matriisikertolaskun tapaan.

8. Laske edellisen tehtävän vierusmatriisin toinen potenssi käyttämällä matriisitulossa uusia kerto- ja yhteenlaskuja, ($\otimes$ ja $\oplus$) jotka on määritelty tehtävässä 7 demokerralla 2 (Demo 5.3.2026). Esitä tulkinta tuloksesta.

9. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Piirrä jokin suunnattu graafi, jonka vierusmatriisi A on. Tässä tehtävässä vierusmatriin ajatellaan muodostetun sillä tavalla, jossa pisteistä lähtevät viivat esitetään matriisin *riveillä* (vrt. luennot). Laske 6-pituisten polkujen lukumäärä pisteestä 1 pisteeseen 2, kun pisteet numeroidaan matriisin rivien mukaan.