Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 4, 19.3.2026

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Muodosta osa 8 alkion kunnan kertotaulusta. Ohje: Alkukuntana on $\mathbb{F}_2$, ja tälle on löydettävä 3. asteen laajennus. Koska $x^3 + x + 1$ on jaoton yli kunnan $\mathbb{F}_2$ (miksi?), voidaan kahdeksan alkion kunta muodostaa tekijäkonstruktiolla $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$. Ihanteen $I = \langle x^3 + x + 1\rangle$ sivuluokkien edustajiksi voidaan valita $p(x) + I$, missä $p(x)$ on korkeintaan toisen asteen polynomi yli kunnan $\mathbb{F}_2[x]$. Mitä tällöin ovat $(1 + x + x^2 + I)(1 + x^2 + I)$, $(x + x^2 + I)(1 + x^2 + I)$ ja $(1 + x + I)(1 + x + I)$? Ohje: $p(x) + I = I$ aina jos $p(x) \in I$.

   Mallivastaus: Polynomi $p(x) = x^3 + x + 1$ on jaoton yli kunnan $\mathbb{F}_2$, koska jos se olisi jaollinen, sillä olisi 1. asteen tekijä ja siten myös nollakohta. Kuitenkin $p(0) = p(1) = 1$.

   Käytetään merkintää $\equiv$ kun $p_1(x) - p_2(x) \in I$. Tällöin

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2)(1 + x^2) &= 1 + x + x^2 + x^2 + x^3 + x^4 = 1 + x + x^3 + x^4 \equiv x^4 \\ &= x^4 + x^2 + x + x^2 + x = x(x^3 + x + 1) + x^2 + x \equiv x^2 + x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + x^2)(1 + x^2) &= x + x^3 + x^2 + x^4 = 1 + 1 + x + x^3 + x + x + x^2 + x^4 \\ &\equiv 1 + x + x(1 + x + x^3) \equiv 1 + x\end{aligned}$$

   ja

$$(1 + x)(1 + x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + x^2.$$

2. Olkoon $q \neq 1$. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

   aina kun $n \in \mathbb{N}$.

   Mallivastaus: Induktion lähtökohta $n = 1$ saa muodon

$$\sum_{i=0}^{1} q^i = \frac{1 - q^2}{1 - q} \Leftrightarrow q^0 + q^1 = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} \Leftrightarrow 1 + q = 1 + q,$$

   mikä on tosi.

   Induktio-oletus: Oletetaan, että yhtäsuuruus on tosi jollekin luvulle n.

   Induktioväite: Yhtäsuuruus on tosi myös arvolla $n + 1$. Suoraan laskemalla ja induktio-oletusta käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.\end{aligned}$$

   Näin ollen väite on tosi myös arvolla $n + 1$.

3. Olkoon $x \geq -1$. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

aina kun $n \in \mathbb{N}$.

Mallivastaus: Induktion lähtökohta $n = 1$ on $(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x \Leftrightarrow 1+x \geq 1+x$, selvästi tosi.

Induktio-oletus: Oletetaan, että epäyhtälö on tosi jollekin luvulle n.

Induktioväite: Epäyhtälö on tosi myös luvulle $n + 1$.

Induktioväitteen todistus:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

4. Piirrä seuraavista propositiologiikan kaavoista puukaavio (kts. luentoruudut)

a) $(x_1 \wedge (\neg x_2 \wedge x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge (x_2 \wedge \neg x_3))$

b) $(x_1 \wedge x_3) \wedge (x_2 \vee (\neg x_1 \vee \neg x_3))$

Mallivastaus: Kuviot piirretään demoissa.

5. Totuusarvotus α määritellään seuraavasti: $\alpha(x_1) = 1$, $\alpha(x_2) = 1$, $\alpha(x_3) = 0$. Määritä edellisen tehtävän propositioiden totuusarvot arvotuksessa α. Onko olemassa sellaista totuusarvotusta, että edellisen tehtävän propositiosta tulisi tosi?

Mallivastaus: Molempien totuusarvo on 0. Jos valitaan esim. $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(x_3) = 1$, saadaan b-kohdan propositiosta tosi, ja esim. valinta $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = 1$, $\alpha(x_2) = 0$ saa a-kohdan proposition todeksi.

6. Määritellään lyhennysmerkintä $x \to y$ kaavana $\neg x \vee y$ (vrt. luennot). Käytä Boolen algebran ominaisuuksia ja sievennä kaava $(x \to (y \to x)$ mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Korvaa ensin implikaatiot negaation ja disjunktion avulla esitetyllä kaavalla.

Mallivastaus:

$$x \to (y \to x) \equiv \neg x \vee (\neg y \vee x) \equiv \neg x \vee (x \vee \neg y) \equiv (\neg x \vee x) \vee \neg y \equiv \top \vee \neg y \equiv \top.$$

Propositio on siis tosi kaikissa arvotuksissa.

7. Kirjoita 3×3 vierusmatriisi luennon 11.3. esimerkkigraafille, jossa esiintyy kuusi suomalaista kaupunkia, rajoittautumalla kaupunkeihin Turku, Tampere, Vaasa. Käytä numerointia etelästä pohjoiseen ja laske vierusmatriisin toinen potenssi A^2 tavallisen matriisikertolaskun tapaan.

Mallivastaus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 120 & 240 \\ 120 & 0 & 170 \\ 230 & 170 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$A^2 = \begin{pmatrix} 69600 & 40800 & 20400 \\ 39100 & 43300 & 28800 \\ 20400 & 27600 & 84100 \end{pmatrix}$$

8. Laske edellisen tehtävän vierusmatriisin toinen potenssi käyttämällä matriisitulossa uusia kerto- ja yhteenlaskuja, ($\otimes$ ja $\oplus$) jotka on määritelty tehtävässä 7 demokerralla 2 (Demo 5.3.2026). Esitä tulkinta tuloksesta.

   Mallivastaus: Uusilla laskutoimituksilla esim. Matriisin A^2 alkio kohdassa $(1,1)$ on

$$0 \otimes 0 \oplus 210 \otimes 120 \oplus 240 \otimes 230 = \max\{0, 420, 470\} = 470.$$

   samalla tavalla saadaan kaikki muutkin matriisitulon alkiot ja

$$A^2 = \begin{pmatrix} 470 & 410 & 290 \\ 400 & 340 & 360 \\ 290 & 350 & 470 \end{pmatrix}$$

   Tulkinta: Matriisialkiot edustavat maksimiaikaa kaupungista toiseen kuljettaessa 2-pituisia reittejä pitkin

9. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Piirrä jokin suunnattu graafi, jonka vierusmatriisi A on. Tässä tehtävässä vierusmatriin ajatellaan muodostetun sillä tavalla, jossa pisteistä lähtevät viivat esitetään matriisin *riveillä* (vrt. luennot). Laske 6-pituisten polkujen lukumäärä pisteestä 1 pisteeseen 2, kun pisteet numeroidaan matriisin rivien mukaan.

   Mallivastaus:

$$A^6 = \begin{pmatrix} 19 & 39 & 19 & 19 \\ 13 & 25 & 13 & 13 \\ 13 & 26 & 12 & 13 \\ 6 & 13 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

   joten kysyttyjä polkuja on 39 kpl.