

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Esimerkki

Funktioita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2 + 3x + 2$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jos } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$

Funktio

Miten ”funktio” määritellään?

Eukleides: ΣΤΟΙΧΕΙΑ

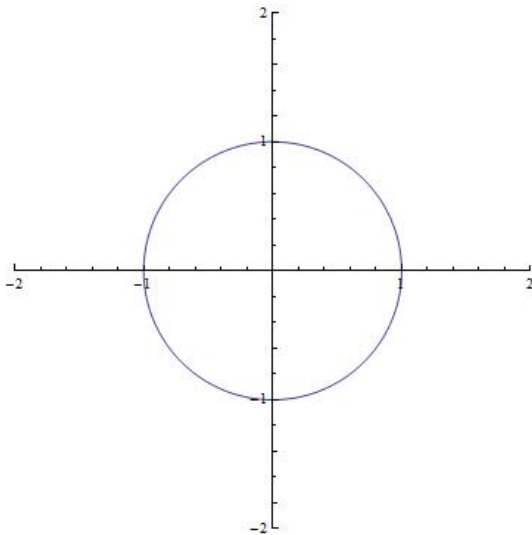


Algebra ja Geometria



René Descartes (latin. *Renatus Cartesius*, 1596–1650)

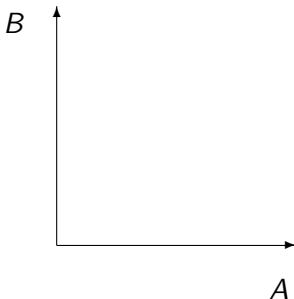
Karteesinen koordinaatisto



$$x^2 + y^2 = 1$$

Yleistys

xy -tason sijaan AB -taso, missä A ja B ovat mitä tahansa joukkoja



Järjestetyt parit

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2)$$

Järjestetyt kolmikot (a_1, a_2, a_3) , nelikot (a_1, a_2, a_3, a_4) jne. samoin.

Karteeminen tulo

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} \text{ jne.}$$

Alkioista a , b , jne. voidaan käyttää nimitystä A -koordinaatti, B -koordinaatti, jne.

Esimerkki

$A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Esimerkki

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

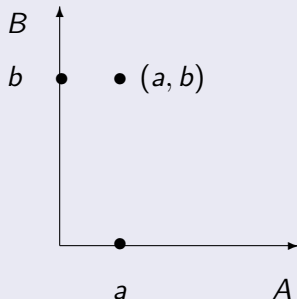
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

jne. Merkitään $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, jne.

$A \times B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Alkioista a ja b voidaan käyttää nimitystä A -koordinaatti ja B -koordinaatti.



"Määritelmä"

Relaatio joukosta A joukkoon B on (mustavalko)kuva AB -tasossa

Relaatio

- Vain mustat kuvapistet luetellaan.
- Pisteet ovat järjestettyjä pareja $(a, b) \in A \times B$
- Kuva on joukko mustia pisteitä, siis järjestettyjä pareja (a, b) , siis $A \times B$:n osajoukko

Määritelmä

Relaatio joukosta A joukkoon B on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$. Sanotaan, että R on relaatio joukosta A joukkoon B . Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* ja B :tä *maalijoukoksi*. Jos $B = A$, sanotaan, että R on joukon A *binäärinen relaatio*.

Merkintöjä

Jos R on relaatio joukosta A joukkoon B ja $(a, b) \in R$, sanotaan, että b on a :n *kuva* ja että a on b :n *alkukuva* ja että a *kuvautuu* b :ksi relaatioissa R . Tällöin käytetään seuraavia merkintöjä:

- $(a, b) \in R$ (Perustuu määritelmään)
- $R(a, b)$ (Predikaattilogiikan merkintä)
- aRb (ns. Infix-merkintä)
- $a \xrightarrow{R} b$ (Esim. nuolikaavioissa)

Merkintöjä

Joukko $\{a \in A \mid (\exists b \in B)(a, b) \in R\}$ on relaation R *määrittelyjoukko*

Merkintöjä

Joukko $\{b \in B \mid (\exists a \in A)(a, b) \in R\}$ on relaation R *kuvajoukko* tai *arvojoukko*

Esimerkkejä

- Merkinnät $2 < 3$, $< (2, 3)$ ja $(2, 3) \in <$
- Diagonaali- eli identiteetti- eli yhtäsuuruusrelaatio
 $D = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- Esimerkki (AB-taso, joukko- ja nuolikaavioesitys)

Yhdiste eli relaatiotulo

Olkoot $R : A \rightarrow B$ ja $S : B \rightarrow C$ relaatioita. Niiden *yhdiste* on relaatio $A \rightarrow C$

$$S \circ R = \{(a, c) \mid (\exists b \in B) (a \xrightarrow{R} b \wedge b \xrightarrow{S} c)\}.$$

Käänteisrelaatio

Jos $R : A \rightarrow B$, määritellään $R^{-1} : B \rightarrow A$ seuraavasti:

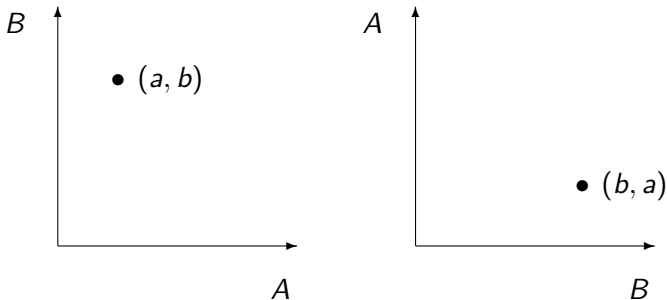
$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Esimerkki

$$R \circ R^{-1}, \quad R^{-1} \circ R$$

Käänteisrelaation kuvaaja

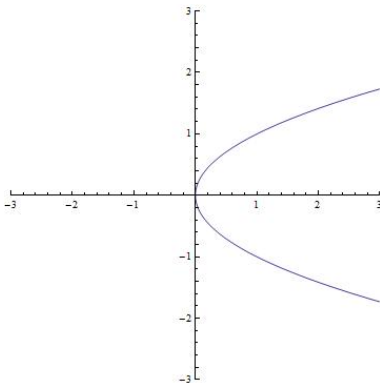
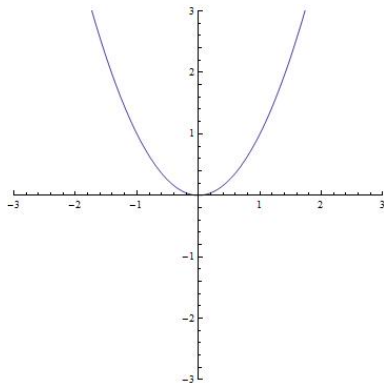
$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$$



Jos $A = B$, saadaan R^{-1} :n kuvaaja peilikuvana suoran $a = b$ suhteen

Käänteisrelaation kuvaaja

$$R = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad R^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



Ekvivalenssi

Joukon A binäärinen relaatio R on *ekvivalenssirelaatio*, mikäli R toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 $(\forall a) aRa$ (refleksiivisyys),
- 2 $(\forall a)(\forall b) aRb \Rightarrow bRa$ (symmetria) ja
- 3 $(\forall a)(\forall b)(\forall c) aRb, bRc \Rightarrow aRc$ (transitiivisuus).

Lause

Joukon A ekvivalenssirelaatio jakaa A :n osajoukkoihin

$$A = \bigcup_{i \in I} [a_i]$$

joille $[a] = \{x \mid xRa\}$ ja $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$ aina kun $\neg(a_iRa_j)$.

Osittainen järjestys

Joukon A binäärinen relaatio R on *osittainen järjestys*, mikäli R toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 $(\forall a) aRa$ (refleksiivisyys),
- 2 $(\forall a)(\forall b) aRb, bRa \Rightarrow a = b$ (antisymmetria) ja
- 3 $(\forall a)(\forall b)(\forall c) aRb, bRc \Rightarrow aRc$ (transitiivisuus).

Jaollisuus

A on joko $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{Z}$.

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in A)(b = a \cdot c)$$

Jaollisuusrelaatio $\mid$ on osittainen järjestys joukossa $\mathbb{N}$ mutta ei joukossa $\mathbb{Z}$.

Lukuteoreettinen kongruenssi

Valitaan $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ja määritellään

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow n \mid (b - a)$$

$\equiv_n$ on joukon $\mathbb{Z}$ ekvivalenssirelaatio.