

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Osittainen järjestys

Joukon A binäärinen relaatio R on *osittainen järjestys*, mikäli R toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 $(\forall a) aRa$ (refleksiivisyys),
- 2 $(\forall a)(\forall b) aRb, bRa \Rightarrow a = b$ (antisymmetria) ja
- 3 $(\forall a)(\forall b)(\forall c) aRb, bRc \Rightarrow aRc$ (transitiivisuus).

Jaollisuus

A on joko $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{Z}$.

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in A)(b = a \cdot c)$$

Jaollisuusrelaatio $\mid$ on osittainen järjestys joukossa $\mathbb{N}$ mutta ei joukossa $\mathbb{Z}$.

Lukuteoreettinen kongruenssi

Valitaan $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ja määritellään

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow n \mid (b - a)$$

$\equiv_n$ on joukon $\mathbb{Z}$ ekvivalenssirelaatio.

Ekvivalenssiluokat

Ehto $n \mid (b - a)$ tarkoittaa, että $b - a = n \cdot k$, joten

$$\begin{aligned}[a] &= \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv_n a\} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots a - 2n, a - n, a, a + n, a + 2n, \dots\}.\end{aligned}$$

Toinen merkintä

Erityisesti lukuteoreettisen kongruenssin yhteydessä käytetään merkintää

$$[a] = \bar{a}.$$

Esimerkki

Kun $n = 6$, on

$$\bar{0} = \{\dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots\},$$

$$\bar{1} = \{\dots, -11, -5, 1, 7, 13, \dots\},$$

$$\bar{2} = \{\dots, -10, -4, 2, 8, 14, \dots\},$$

$$\bar{3} = \{\dots, -9, -3, 3, 9, 15, \dots\},$$

$$\bar{4} = \{\dots, -8, -2, 4, 10, 16, \dots\},$$

$$\bar{5} = \{\dots, -7, -1, 5, 11, 17, \dots\},$$

$$\bar{6} = \{\dots, -6, 0, 6, 12, 18, \dots\} = \bar{0}$$

Huomautus

$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \bar{5}$ ja $\bar{i} \cap \bar{j} = \emptyset$, jos $i \not\equiv_6 j$.

Ekvivalenssiluokkien yhteen- ja kertolasku

- $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$
- $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$

Riippumattomuus edustajasta

Esimerkiksi $\overline{3} = \overline{9}$ ja $\overline{5} = \overline{-7}$.

- $\overline{3} + \overline{5} = \overline{3 + 5} = \overline{8} = \overline{2}$ ja
- $\overline{9} + \overline{-7} = \overline{9 + (-7)} = \overline{2}$. Samoin
- $\overline{3} \cdot \overline{5} = \overline{15} = \overline{3}$ ja
- $\overline{9} \cdot \overline{-7} = \overline{-63} = \overline{3}$

Äärellinen algebrallinen systeemi

- Alkiot $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\}$
- Yhteen- ja kertolasku
- Säännöt $a + b = b + c$, $ab = ba$, $a(b + c) = ab + ac$, jne. periytyvät suoraan kokonaislukujen ominaisuuksista
- Algoritminen käsittely periytyy kokonaislukujen ominaisuuksista.

Määritelmä

Relaatio $f : A \rightarrow B$ on funktio, jos jokaista joukon A alkia a kohti on tarkalleen yksi joukon B alkio b siten että $(a, b) \in f$.

Huomautus

Jokainen pystysuora leikkaa funktion kuvaajan tasan kerran.

Määritelmä

Edellisen määritelmän tapauksessa merkitään $f(a) = b$ ja relaatioiden yleistä terminologiaa käyttäen sanotaan, että b on a :n kuva, a on b :n alkukuva, ja että a kuvautuu b :ksi.

Lause

Jos $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ ovat funktiota, on relaatiotulo $g \circ f$ myös funktio

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ funktioita. *Yhdistetty funktio* $g \circ f$ on relaatiotulo $g \circ f : A \rightarrow C$, jolle siis relaatiotulon määritelmän mukaan pätee $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Tällöin funktiota f kutsutaan *sisäfunktiksi* ja g :tä *ulkofunktiksi*

Esimerkki

Jos $h(x) = e^{-x^2}$, voidaan h kirjoittaa muodossa $h = g \circ f$, missä $g(x) = e^x$ on ulkofunktio ja $f(x) = -x^2$ on sisäfunktio.

Määritelmä

Funktio $f : A \rightarrow B$ on *injektio*, jos $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

$f : A \rightarrow B$ on *surjektio*, jos $f(A) = B$. $f : A \rightarrow B$ on *bijektio*, jos f on sekä injektio että surjektio.

Huomautus

- Jokainen vaakasuora leikkaa injektion kuvaajan korkeintaan kerran.
- Jokainen vaakasuora leikkaa surjektion kuvaajan ainakin kerran.
- Jokainen vaakasuora leikkaa bijektion kuvaajan tasan kerran.

Lause

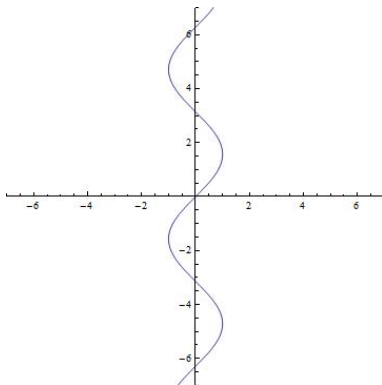
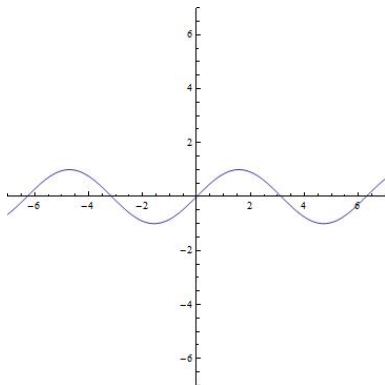
Jos $f : A \rightarrow B$ on bijektiivinen funktio, on käänteisrelaatio $f^{-1} : B \rightarrow A$ myös funktio, ns. f :n *käänteisfunktio*. Kääntäen, jos funktion $f : A \rightarrow B$ käänteisrelaatio $f^{-1} : B \rightarrow A$ on funktio, on f bijektio.

Huomautus

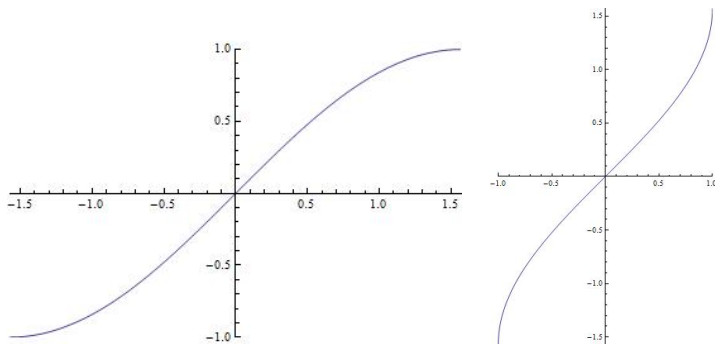
Funktion $f : A \rightarrow B$ käänteisrelaatio on funktio *vain* jos f on bijektio.

$$\sin = \{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\sin^{-1} = \{(\sin x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



$$\sin = \{(x, \sin x) \mid x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}, \sin^{-1} = \{(\sin x, x) \mid x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$



Määritelmä

Algebrallinen rakenne on joukko A , jossa on määritelty äärellinen määrä operaatioita. Operaatiot voivat olla unaarisia, binäärisiä, ternäärisiä, jne. Operaatioiden lisäksi voi olla äärellinen määrä aksioomia.

Esimerkki

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ (kts. Differentiaali- ja integraalilaskenta). Aksioomia: $(\forall a)(\forall b)(a + b = b + a)$, $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$, jne.

Esimerkki

(Grupoidi eli Magma) Joukko $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ja binäärinen operaatio $*$:

$*$	α	β	γ	δ
α	β	γ	β	δ
β	δ	δ	α	α
γ	α	γ	α	β
δ	β	δ	γ	δ

- $\alpha * \beta = \gamma, \beta * \alpha = \delta,$
- $(\alpha * \beta) * \gamma = \gamma * \gamma = \alpha, \alpha * (\beta * \gamma) = \alpha * \alpha = \beta.$
- Säännöt $x * y = y * x$ ja $x * (y * z) = (x * y) * z$ eivät siis välttämättä päde.
- Ei juurikaan merkitystä teorialle tai sovelluksille.

Puoliryhmä

Puoliryhmä (semigroup) on magma jonka operaatio $*$ toteuttaa aksiooman

$$(\forall x, y, z)((x * y) * z = x * (y * z)).$$

Tämän aksiooman toteuttavaa operaatiota $*$ kutsutaan *assosiatiiviseksi*. Voidaan siis myös sanoa, että puoliryhmä on assosiatiivinen magma.