1. Luennoilla on määritelty Hermiten sisätulo

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f\overline{g}.$$

Määritä funktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^3$ sisätulo, kun $\alpha = 0$ ja $T = 2\pi$.

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} x^2 \overline{x^3}\,dx = \int_0^{2\pi} x^2 x^3\,dx = \int_0^{2\pi} x^5\,dx$$

$$= \Big/_0^{2\pi} \frac{1}{6}x^6 = \frac{1}{6}(2\pi)^2 - \frac{1}{6}\cdot 0^6 = \frac{32\pi^7}{6}$$

2. Määritä edellisen tehtävien funktioden sisätulo, kun $\alpha = -\pi$ ja $T = 2\pi$.

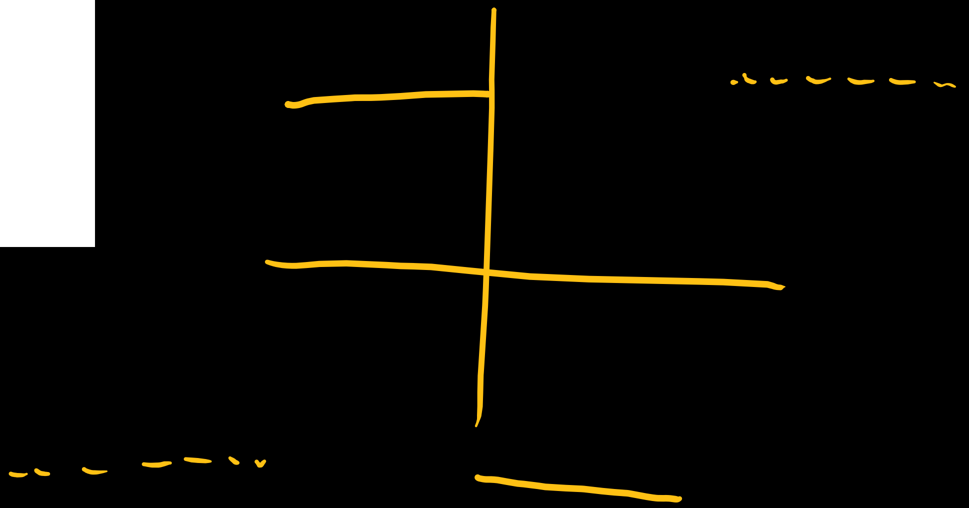
$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \overline{x^3}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^5\, dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{6}x^6$$

$$= \frac{1}{6}\pi^6 - \frac{1}{6}(-\pi)^6 = \underline{\underline{0}}$$

3. Etsi Fourier-sarja (myös reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -1, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Missä pisteissä Fourier-sarja esittää funktiota f?



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{inx}$$

$$F_n = (f, e^{inx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1 \cdot e^{-inx}\,dx + \int_{0}^{\pi} -1 e^{-inx}\,dx\right)$$

$n \neq 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\Big/_{-\pi}^{0} \frac{1}{-in} e^{-inx} - \Big/_{0}^{\pi} \frac{1}{-in} e^{-inx}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-in}\left(1-\underbrace{e^{i\pi n}}_{=(-1)^n}\right) - \frac{1}{-in}\left(\underbrace{e^{-\pi i n}}_{=(-1)^n}-1\right)\right)$$

$$= \boxed{-\frac{1-(-1)^n}{i\pi n}}$$ F_n, fun $n \neq 0$

Jos $n=0$: $\underline{F_0} = (f, 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\pi} -1\,dx\right)$

$$= \underline{0}$$

$$f(x) = -\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{i\pi n} e^{inx} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i\pi(2n+1)} e^{i(2n+1)x}$$

$$A_n = F_n + F_{-n} = -\frac{1-(-1)^n}{i\pi n} + \left(\cancel{-}\,\frac{1-(-1)^{-n}}{\cancel{-}\,i\pi n}\right) = \underline{0}$$

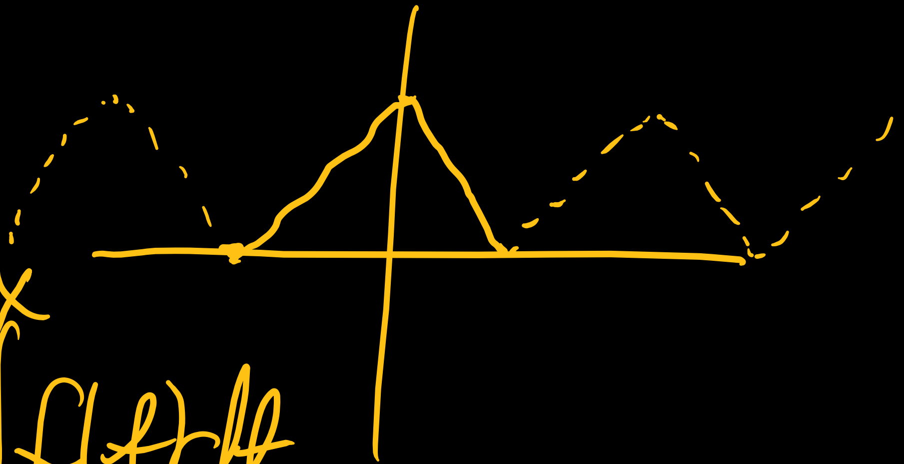
$$B_n = i(F_n - F_{-n}) = \cancel{i}\left(-\frac{1-(-1)^n}{\cancel{i}\pi n} + \frac{1-(-1)^{-n}}{-\cancel{i}\pi n}\right) = \frac{-2(1-(-1)^n)}{\pi n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(nx) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$

4. Etsi Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$g(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -x + \pi, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Ohje: Selvitä miten funktio g ja edellisen tehtävän funktio kytkeytyvät toisiinsa (piirrä kuvaajat, kokeile derivointia)



Koska $g'(x) = f(x)$, niin $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$$= -\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin([2k+1]t)\,dt = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \int_0^x \sin([2k+1]t)\,dt$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \Big/_0^x \frac{-1}{2k+1} \cos([2k+1]t)$$

parillisuus pariton

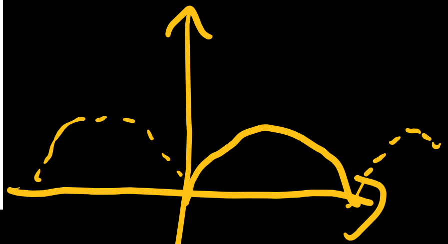
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\Big[\cos([2k+1]x) - \underbrace{\cos([2k+1](-\pi))}_{-1}\Big]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x) + \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}}^{+1}$$

$$F_0 = (g,1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{F_n = (g, e^{inx}) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (\pi+x)e^{-inx}\,dx + \int_{0}^{\pi} (\pi-x)e^{-inx}\,dx\right)}$$

5. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[0, \pi]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \sin x$. Tarvittavat Fourier-kertoimet voi määrittää matematiikkaohjelmalla.



$$F_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\, e^{-2inx}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}_{\sin(x)} e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_0^\pi e^{(i-in)x} - e^{(-i-in)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big/_0^\pi \frac{1}{i-in} e^{(i-in)x} + \frac{1}{1+in} e^{(-i-in)x}$$

$$= \dots = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right) = \boxed{\frac{2}{\pi(1-4n^2)}}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{inx}}$$

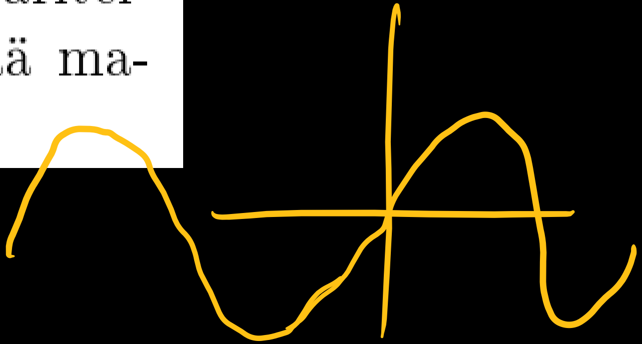
$$A_n = F_n + F_{-n} = \frac{2}{\pi(1-4n^2)} + \frac{2}{\pi(1-4(-n)^2)} = \underline{\underline{\frac{4}{\pi(1-4n^2)}}}$$

$$A_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$B_n = i(F_n - F_{-n}) = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)}}$$

6. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \sin x$. Tarvittavat Fourier-kertoimet voi määrittää matematiikkaohjelmalla.



$$F_n = (\sin(x), e^{-inx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, e^{-inx}\, dx$$

---

sin(nx) ja cos(nx) muodostavat ortonormaalin kannan

$$(\sin(nx), \cos(mx)) = 0 \qquad (\sin(nx), \sin(nx)) = 1$$

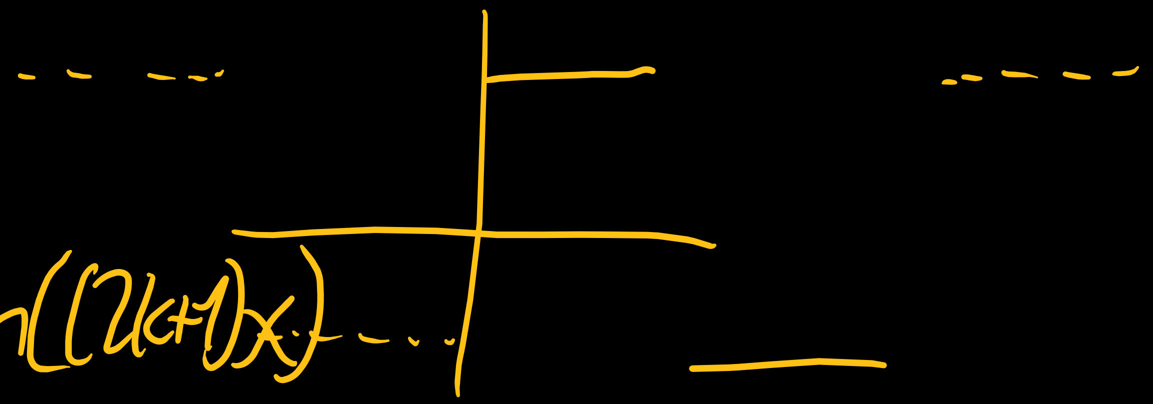
$$(\sin(nx), \sin(mx)) = 0, \text{ jos } n \neq m$$

$$\sin(x) = \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{=1}{B_n} \sin(nx)$$

7. Hahmottele kanttiaallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.

Kanttiaalto sq:

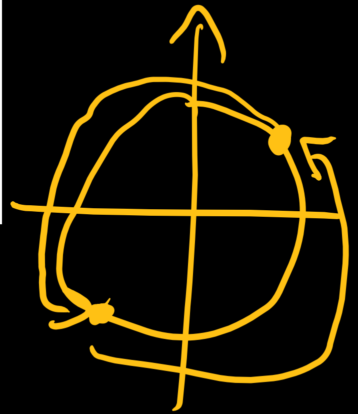
$$sq(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ -1 & \text{kun } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



$$sq(x) = -f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x) \ldots$$

teht. 3

8. Hahmottele kolmioaallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.



Kolmioaalto tr:

$$tr(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}x - 4 & \text{kun } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$tr(x) = \frac{2}{\pi} g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos\left([2k+1]\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\left([2k+1]x - k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \cancel{+1-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2} \sin\left([2k+1]x - k\pi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} \sin\left([2k+1]x\right)$$

9. Hahmottele saha-aallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.

Saha-aalto *saw*:

$$saw(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{\pi}x - 2 & \text{kun } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$saw(x) = 2\sigma_0\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right) \underset{(5.6)}{=} -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\sin\left(\cancel{2\pi} n \cdot \frac{x-\pi}{\cancel{2\pi}}\right)$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\sin(nx - n\pi) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\cdot(-1)^n}{\pi n}\sin(nx)}}$$