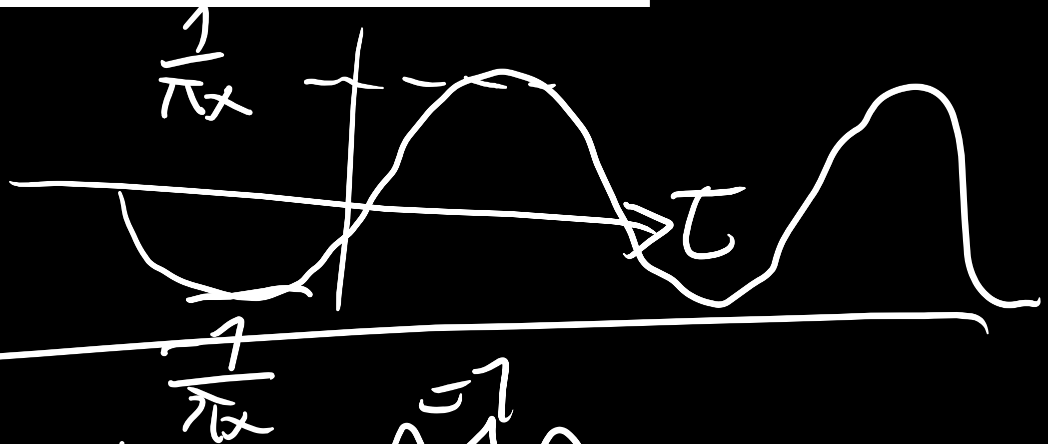
1. Osoita, että raja-arvoa $\lim_{\tau \to \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x)$ ei ole olemassa (äärellisenä) millekään luvulle $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$



Tapaus $x = 0$: $\lim_{\tau \to \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x) = \lim_{\tau \to \infty} \tau \underbrace{\operatorname{sinc}(0)}_{=1} = \lim_{\tau \to \infty} \tau = \infty$

Tapaus $x \neq 0$: $\lim_{\tau \to \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x) = \lim_{\tau \to \infty} \cancel{\tau} \cdot \frac{\sin(\tau \pi x)}{\cancel{\tau} \pi x} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\sin(\tau \pi x)}{\pi x}$

Koska osamäärä oskilloi arvojen $-\frac{1}{\pi x}$ ja $\frac{1}{\pi x}$ välissä, raja-arvo hajaantu[...]

2. Olkoon $\alpha > 0$. Laske $\mathcal{F}[e^{-\alpha|x|}](y)$ suoraan Fourier-muunnoksen määritelmään perustuen. Vastaus: $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 y^2}$, mutta esitä yksityiskohdat ja perustelut.

$-\alpha|x| = -|\alpha||x|$
$= -|\alpha x|$

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-2\pi i x y} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|-2\pi i x y} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-|x|-2\pi i x y} dx$$

$-|x| = -(-x)$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x-2\pi i y x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x-2\pi i x y} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-2\pi i y)} dx + \int_{0}^{\infty} e^{x(-1-2\pi i y)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1-2\pi i y} e^{x(1-2\pi i y)} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{-1-2\pi i y} e^{x(-1-2\pi i y)}$$

$$= \frac{1}{1-2\pi i y} - \frac{1}{-1-2\pi i y} = \frac{2}{1+4\pi^2 y^2}$$

$\alpha)$

$$\mathcal{F}\left[e^{-\alpha|x|}\right](y) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2} = \frac{2}{\alpha + 4\pi^2 \frac{y^2}{\alpha}} = \underline{\underline{\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 y^2}}}$$

Skaalaus

3. Määritä

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y).$$

Ohje: Etsi edelliseen tehtävän, lineaarisuuden ja skaalausperiaatteen avulla sellainen funktio $f(x)$, jolle $\mathcal{F}[f(x)](y) = \frac{1}{1+y^2}$. Käytä lopuksi duaaliperiaatetta.

$$\mathcal{F}[\underbrace{\mathcal{F}[f(x)]}_{\frac{1}{1+x^2}}(y)](x) = f(-x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} \to f(x) \approx e^{-\alpha|x|}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-2\pi i y x}\, dx$$

$g(x) = \alpha e^{-\beta|x|}$. Etsitään α ja β niin, että

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathcal{F}[\alpha e^{-\beta|x|}](y) = \alpha \frac{1}{\beta} \frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}$$

$$x^2 = 4\pi^2\left(\frac{x^2}{\beta}\right)$$

$$\beta = 2\pi$$

$$1 = \frac{2\alpha}{\beta}$$

$$1 = \frac{2\alpha}{2\pi}$$

$$\alpha = \pi$$

$$\mathcal{F}\left[\alpha e^{-\beta|x|}\right](y) = \mathcal{F}\left[\pi e^{-2\pi|x|}\right](y)$$

$$= \frac{1}{1+y^2} \quad \| \; \mathcal{F}[\;]$$

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\pi e^{-2\pi|x|}\right](y)\right](x) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+y^2}\right](x)$$

$$\pi e^{-2\pi|-x|} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+y^2}\right](x) \quad \| \; y \leftrightarrow x$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \underline{\underline{\pi e^{-2\pi|x|}}}$$

4. Luennoilla määriteltiin Hermiten sisätulo seuraavasti:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Laske sisätulo $(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x})$ ja esitä se δ-funktion avulla. Ohje: Voit hyödyntää luennolla esiintyneitä δ-funktion esitystapoja.

$$\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y x}\, dx$$

$$(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_1 x} e^{-2\pi i f_2 x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i (f_1 - f_2) x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (f_2 - f_1) x}\, dx = \underline{\underline{\delta(f_2 - f_1)}}$$

5. Selvitä duaalitettiperiaatetta käyttämällä $\mathcal{F}[\delta(x)](y)$ ja tämän avulla $\mathcal{F}[\delta'(x)](y)$. Käytä jälkimmäistä tulosta selvittääksesi $\mathcal{F}[x](y)$.

Tiedetään, että $\mathcal{F}[1](y) = \delta(y)$

Duaaliperiaate: $\mathcal{F}[\delta(y)](x) = 1$

Derivaattaperiaate: $\mathcal{F}[\delta'(x)](y) = 2\pi i y \cdot 1 = \underline{\underline{2\pi i y}}$ (*)

Aputulos: $\delta'(-x) = -\delta'(x)$

Perustuu kaavoihin $x\delta'(x) = -\delta(x)$ ja $\delta(-x) = \delta(x)$

$$(-x)\delta'(-x) = -\delta(-x) = -\delta(x) = x\delta'(x) \quad \| :(-x)$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

$(*)$ $\mathcal{F}[\delta'(y)](x) = 2\pi i x \quad \| \mathcal{F}[\;]$

$$2\pi i\, \mathcal{F}[x](y) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta'(y)](x)](y) \quad \| \text{Duaaliperiaate}$$

$$= 2\pi i\, \mathcal{F}[x](y) = \delta'(-y) = -\delta'(y)$$

$$\mathcal{F}[x] = \frac{-\delta'(y)}{2\pi i}$$

6. Jos $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$ tunnetaan, mikä on $\mathcal{F}[xf(x)](y)$? Ohje: Vastaus löytyy esim. derivoimalla $F(y)$:n integraaliesitys. Toinen vaihtoehto on käyttää derivointiperiaattetta sekä duaaliperiaatetta. Vastaus: $\mathcal{F}[xf(x)](y) = \frac{F'(y)}{-2\pi i}$, mutta esitä perustelut.

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x}\,dx \quad \| \text{derivoidaan}$$

$$F'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} f(x) e^{-2\pi i y x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} \cdot (-2\pi i x)\,dx$$

$$= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x f(x)} e^{-2\pi i y x}\,dx = -2\pi i\, \mathcal{F}[x f(x)](y) \quad \| : -2\pi i$$

$$\mathcal{F}[x f(x)](y) = \frac{F'(y)}{-2\pi i}$$

Duaalipericote: $\mathcal{F}[F(y)](x) = f(-x)$

Derivointi: $\mathcal{F}[F'(y)](x) = 2\pi i x f(-x)$

$x \rightsquigarrow -x$ $\quad \mathcal{F}[F'(y)](-x) = -2\pi i x f(x) \quad \| \mathcal{F}[\ ]$

$$-2\pi i \mathcal{F}[x f(x)](y) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[F'(y)](-x)](y)$$

Duaalipericate $\quad -2\pi i \mathcal{F}[x f(x)](y) = F'(y) \quad \| : (-2\pi i)$

$$\mathcal{F}[x f(x)](y) = \frac{F'(y)}{-2\pi i}$$

7. Oletetaan, että $f(x)$ toteuttaa yhtälön $f'(x) = -2\pi x f(x)$. Osoita että myös $f(x)$:n Fourier-muunnos $F(y)$ toteuttaa samanlaisen yhtälön. Ohje: Käytä derivointiperiaatetta ja aiemman tehtävän tulosta.

$$f'(x) = -2\pi x f(x) \quad \| \mathcal{F}[\,]$$

$$\mathcal{F}[f'(x)](y) = \mathcal{F}[-2\pi x f(x)](y)$$

$$2\pi i y F(y) = -2\pi \mathcal{F}[x f(x)](y) \quad \| \text{Teht. 6}$$

$$2\pi i y F(y) = -\cancel{2\pi} \frac{F'(y)}{-\cancel{2\pi} i} \quad \| \cdot i$$

$F'(y) = -2\pi y F(y)$ eli vaadittu yhtälö toteutuu!

8. Osoita, että funktio $f(x) = e^{-\pi x^2}$ toteuttaa yhtälön $f'(x) = -2\pi x f(x)$. Oletetaan, että myös funktio $g(x)$ toteuttaa yhtälön $\boxed{g'(x) = -2\pi x g(x)}$. Laske

$$\frac{d}{dx}\frac{g(x)}{e^{-\pi x^2}}.$$

Mitä voit päätellä tuloksesta?

$f(x) = e^{-\pi x^2}$, joten $f'(x) = e^{-\pi x^2} \cdot (-2\pi x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$ ✓

$$\frac{d}{dx}\frac{g(x)}{e^{-\pi x^2}} = \frac{\boxed{g'(x)} e^{-\pi x^2} - g(x) e^{-\pi x^2} \cdot (-2\pi x)}{(e^{-\pi x^2})^2}$$

$$= \frac{\boxed{-2\pi x g(x)} e^{-\pi x^2} + 2\pi x g(x) e^{-\pi x^2}}{(e^{-\pi x^2})^2} = \frac{0}{(e^{-\pi x^2})^2} = \underline{\underline{0}}$$

Derivaatta 0 $\longrightarrow$ Funktio on vakio: $\dfrac{g(x)}{e^{-\pi x^2}} = C \quad \| \cdot e^{-\pi x^2}$

$$\boxed{g(x) = Ce^{-\pi x^2}}$$

9. Päättele edellisten tehtävien perusteella, että $\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](y) = e^{-\pi y^2}$.

Funktio toteuttaa yhtälön $f'(x) = -2\pi x f(x)$

joten myös sen Fourier-muunnos toteuttaa sen (Teht. 7)

$F'(y) = -2\pi y F(y)$

$$\frac{d}{dy}\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](y) = -2\pi y \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](y)$$

$$\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](y) = \underline{C} e^{-\pi y^2} \quad \text{(Teht. 8)}$$

Vielä pitää näyttää, että $C = 1$.

Plancherelin kaava: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2 dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\pi x^2}|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |Ce^{-\pi y^2}|^2 dy = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\pi y^2}|^2 dy$$

$|C|^2 = 1$

$\boxed{|C| = 1}$

Palataan vielä Fourier-muunnokseen

$$Ce^{-\pi y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i y x} dx \quad \| y = 0$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \rightarrow \boxed{\text{pos. ja reaalinen}}$$

$\rightarrow \underline{C = 1}$