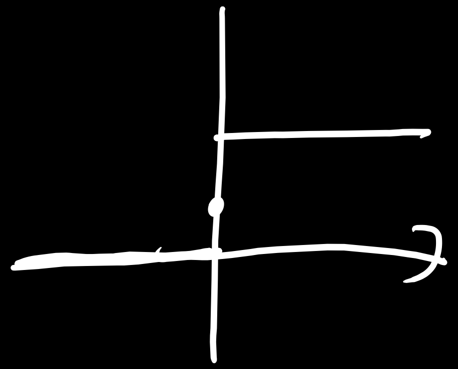
1. Olkoon H Heavisiden funktio. Varmista että kaava

$$\Pi(x) = H(x + \frac{1}{2}) - H(x - \frac{1}{2})$$

pitää paikkansa. Laske tämän jälkeen kaavan kummankin puolen Fourier-muunnokset käyttämällä oikealla puolella lineaarisuutta ja aikasiirtoa. Merkitse funktion H Fourier-muunnosta $\widehat{H}$:lla. Minkä lausekkeen saat näin $\widehat{H}$:lle?

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$x < -\frac{1}{2}$: $\Pi(x) = 0$, $H(x+\frac{1}{2}) = 0$, $H(x-\frac{1}{2}) = 0$ ✓.

$x > \frac{1}{2}$: $\Pi(x) = 0$, $H(x+\frac{1}{2}) = 1$, $H(x-\frac{1}{2}) = 1$ ✓.

$0 < x < \frac{1}{2}$: $\Pi(x) = 1$, $H(x+\frac{1}{2}) = 1$, $H(x-\frac{1}{2}) = 0$ ✓. jne

$$\mathcal{F}[\Pi(x)](y) = \mathcal{F}\left[H\left(x+\tfrac{1}{2}\right) - H\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right](y)$$

$$\sin(y) = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

$$= \hat{H}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(y) - \hat{H}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(y)$$

$$= \hat{H}(y)\underbrace{e^{-2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)y}}_{e^{\pi i y}} - \hat{H}(y)\underbrace{e^{-2\pi i\cdot\frac{1}{2}y}}_{e^{-\pi i y}}$$

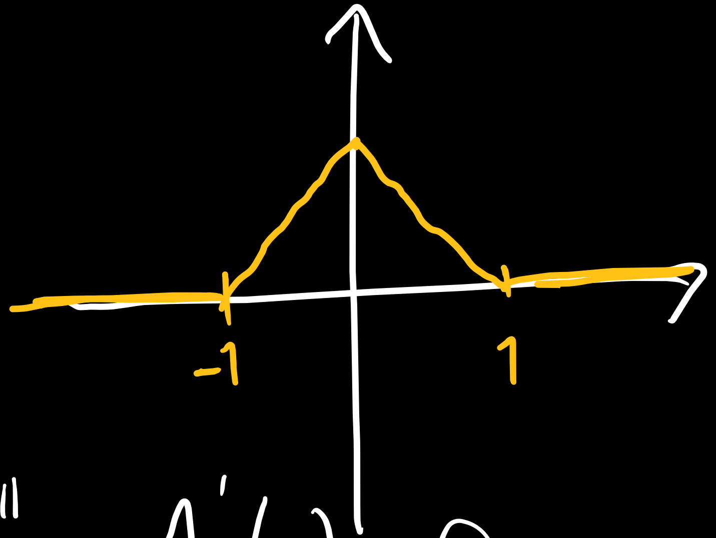
$$\widehat{\mathrm{sinc}}(y) = \hat{H}(y)\left[e^{\pi i y} - e^{-\pi i y}\right] = \hat{H}(y)\,2i\sin(\pi y)$$

$$\hat{H}(y) = \mathrm{sinc}(y)\cdot\frac{1}{2i\sin(\pi y)} = \frac{\cancel{\sin(\pi y)}}{\pi y}\cdot\frac{1}{2i\cancel{\sin(\pi y)}} = \frac{1}{2\pi i y}$$

2. Piirrä kuvaaja kolmiopulssille

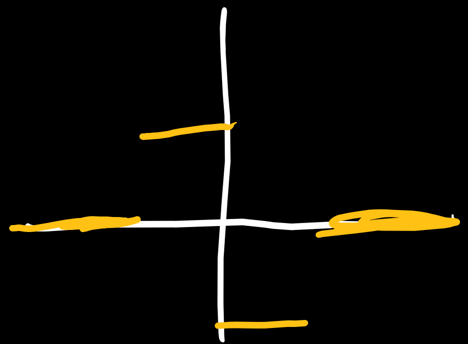
$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \le -1 \\ x+1, & \text{jos } x \in [-1,0] \\ -x+1, & \text{jos } x \in [0,1] \\ 0, & \text{jos } x \ge 1 \end{cases},$$

selvitä millaisen funktion f integraalifunktio Λ on, ja laske integrointiperiaatetta (vuoden 2019 Moniste C, esimerkki 52) käyttämällä $\mathcal{F}[\Lambda(x)](y)$. Ohje 1: Mieti ensin millainen olisi derivaattafunktio Λ:lle. Ohje 2: Funktion f esityksessä esiintyy suorakulmaisia pulsseja.



Λ on $f(x)$:n integraalifunktio "jos" $\Lambda'(x) = f(x)$

$$\text{"}\Lambda'(x)\text{"} = \begin{cases} 0, & \text{jos } x<-1 \\ 1, & \text{jos } x\in[-1,0] \\ -1, & \text{jos } x\in(0,-1] \\ 0, & \text{jos } x>1 \end{cases} \Rightarrow \Lambda(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$



$$\boxed{f(x) = \Pi\left(x+\tfrac{1}{2}\right) - \Pi\left(x-\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)](y) = \mathcal{F}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](y) = \frac{1}{2\pi i y}\mathcal{F}[f(t)](y)$$

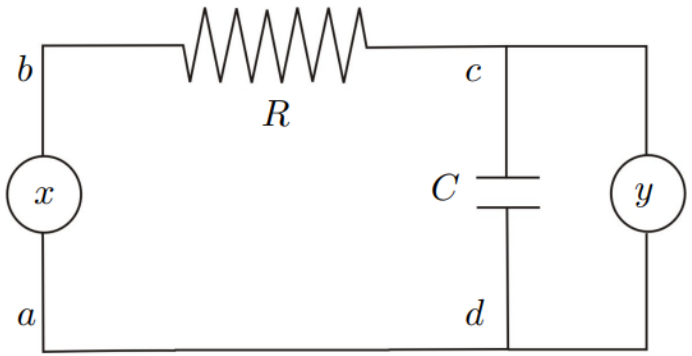
$$= \frac{1}{2\pi i y}\mathcal{F}\left[\Pi\left(x+\tfrac{1}{2}\right)-\Pi\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i y}\left[\underbrace{\mathcal{F}[\Pi(x)]}_{\mathrm{sinc}(y)}(y)\,e^{\pi i y}-\underbrace{\mathcal{F}[\Pi(x)]}_{\mathrm{sinc}(y)}(y)\,e^{-\pi i y}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi \cancel{i} y}\,\mathrm{sinc}(y)\cdot \cancel{2i}\sin(\pi y) = \mathrm{sinc}(y)\cdot \overbrace{\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}}^{\mathrm{sinc}(y)} = \underline{\underline{\mathrm{sinc}^2(y)}}$$

3. Kirjoita differentiaaliyhtälö kuvan piirin syöttöjännitteen x (input) ja mitattavan jännitteen y (output) välille ja tulkitse piiri signaalia muokkaavaksi laitteeksi: jännite x olkoon syöte ja y tuloste. Selvitä millä tavalla $y(t)$:n spektri $Y(f)$ riippuu $x(t)$:n spektristä $X(f)$. Selvitä lopuksi miten $y(t)$:n amplitudispektri voidaan esittää $x(t)$:n amplitudispektrin avulla.

Ohje: Jännite y on sama kuin pisteiden c ja d välinen jännite. Merkitse piirissä $a \to b \to c \to d \to a$ kulkevaa virtaa I:llä ja käytä Kirchhoffin sääntöjä sekä sähkötekniikan perusyhtälöitä $U = RI$, $U = \frac{Q}{C}$ ja $I = C\frac{dU}{dt}$ (yhtälöksi pitäisi saada $x = RCy' + y$). Mittarin y kautta kulkeva virta oletetaan nollaksi (yhtälöksi pitäisi saada $x = RCy' + y$). Laske saadusta differentiaaliyhtälöstä Fourier-muunnokset ja lopuksi spektrien itseisarvot.



$$X = U_R + U_C$$

$$X = RI + y$$

$$X = RC\frac{dU}{dt} + y$$

$$\boxed{X = RCy' + y} \quad || \mathcal{F}[\,]$$

$$X(f) = \mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}[RCy' + y] = RC \cdot 2\pi i f\, Y(f) + Y(f)$$

$$Y(f) = \frac{1}{1 + RC \cdot 2\pi i f} X(f)$$

$$|Y(f)| = \left|\frac{1}{RC \cdot 2\pi i f + 1}\right| |X(f)|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RCf)^2}} |X(f)|$$

Merk. $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$

4. Signaalista $f(x)$ on saatu 1000 näytettä aikavälillä $[0,1]$ tasaisin väliajoin, mikä merkitsee sitä, että signaalia esittää jono $(f_0, f_1, \ldots, f_{999})$. Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \ldots, F_{999})$. Minkä taajuuden amplitudia tällöin edustavat F_{30}, F_{150}, F_{768} ja F_{922}?

Taajuudet: $30,\ 150,\ 1000-768 = \underline{\underline{232}},\ 1000-922 = \underline{\underline{78}}$

5. Signaalista $s_{230}(x) = \sin(2\pi \cdot 230x)$ otetaan näytteitä tasavälein alkaen pisteestä $x = 0$, mikä on näytteenottotaajuuden oltava, että alkuperäinen signaali voitaisiin rekonstruoida?

Näytteitä otetaan kuitenkin taajudella 120. Etsi taajuuden 230 alittavat sinifunktiot jotka tällöin antavat samat näytteet kuin $s_{230}(x)$.

$s_{230}(x) = \sin(2\pi \cdot 230x)$

Näytteenottotaajuus enemmän kuin $2 \cdot 230 = \underline{\underline{460}}$

$d_n = \sin\left(2\pi \cdot 230 \cdot \frac{n}{120}\right) \underset{\uparrow}{=} \sin\left(2\pi\left(230 \cdot \frac{n}{120} - mn\right)\right)$

sin 2π-jaks.

$= \sin\left(2\pi(230 - 120m)\frac{n}{120}\right)$

Valitaan $m = 1 \rightarrow$ taajuus 110

6. *Neoconocephalus robustus* -lajin hepokatti tuottaa 6,6 kHz taajuisen, yli kilometrin päähän kuuluvan äänen. *Nikon Coolpix 5200* -kameran mikrofoni ei silti taltioi sen ääntä edes lähietäisyydeltä. Mitä voidaan tällöin päätellä taajuudesta, jolla mikrofoni taltioi ääninäytteitä?

Taltiointitaajuus on alle $2 \cdot 6{,}6\,\text{kHz} = \underline{\underline{13{,}2\,\text{kHz}}}$

7. Etsi 2×2-matriisi U, joka toteuttaa 2-pituisten jonojen diskreetin Fourier-muunnoksen:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on U:n käänteismatriisi? Ohje: Määritä ensin muunnos luonnollisen kannan vektoreille $(1,0)^T$ ja $(0,1)^T$.

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{1} f_k \underbrace{e^{-\frac{\cancel{2}\pi i k \cdot 0}{\cancel{2}}}}_{e^{-\pi i k \cdot 0} = 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 \cdot 1 + f_1 \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 + f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{1} f_k e^{-\frac{\cancel{2}\pi i k \cdot 1}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_0 e^{0} + f_1 \underbrace{e^{-\pi i \cdot 1}}_{=-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 - f_1) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Lineaarimuunnoksen matriisin pystyrivit ovat kantavektorien kuvat

$$U = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} & \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \quad\downarrow \\ F_0 & \quad F_1 \end{array} & \end{array} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

$$\det(U) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}}$$

8. Olkoon $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \mathrm{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ja $(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) = \mathrm{DFT}(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$. Sijoita summaan

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}$$

lauseke F_{l-r}:lle, vaihda summausjärjestys ja sievennä mahdollisimman pitkälle. Tulkitse näin saatu yhtälö vertaamalla sitä Fourier-muunnosten konvoluutioon.

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r} = \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot (l-r)}{N}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} f_k e^{-\frac{2\pi i k (l-r)}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r e^{\frac{2\pi i k r}{N}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r e^{\frac{2\pi i k r}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r e^{\frac{2\pi i k r}{N}}}_{g_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k l} g_k = \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_k e^{-2\pi i k l} \quad \Big|\Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}}_{\text{Fourierkertoimien konvoluutio}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r g_r e^{-2\pi i r l}}_{fg\text{:n Fourier-kertoimet}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{DFT}(f_{\ldots}) * \mathrm{DFT}(g_{\ldots}) \\ &= \mathrm{DFT}(f \cdot g) \end{aligned}}$$

9. Laske jonon $(4, 0, 4, 1)$ diskreetti Fourier-muunnos käyttämällä FFT-algoritmia.

$f_0 = 4,\ f_1 = 0,\ f_2 = 4,\ f_3 = 1.\quad (F_0, F_1, F_2, F_3) = FFT(f_0, f_1, f_2, f_3)$

$FFT(4, 4) \qquad\qquad FFT(0, 1)$

$FFT(4) = 4 \qquad FFT(4) = 4$

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{1} f_k \underbrace{e^{-\frac{2\pi i k \cdot 0}{2}}}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 + f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4+4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{1} f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_0 e^0 + f_1 \underbrace{e^{-\pi i}}_{=-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \cdot 1 + 4(-1)) = \underline{\underline{0}}$$

FFT(0,1):

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 + f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 - f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)$$

FFT(4,0,4,1):

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 + e^{-2\pi i \cdot \frac{0}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1\right) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot 9}$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \underbrace{e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{4}}}_{e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)\right) = \frac{1}{2}\left(0 - i \cdot (-1)\right) = \boxed{\frac{1}{2} i}$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 + \underbrace{e^{-2\pi i \cdot \frac{2}{4}}}_{e^{-\pi i} = -1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{1}{2}(8 - 1) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot 7}$$

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + e^{-2\pi i \cdot \frac{3}{4}} \cdot (-1)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + i(-1)\right) = \boxed{-\frac{1}{2} i}$$

$$FFT(4,0,4,1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(9,\ i,\ 7,\ -i)}}$$