

# Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

## Demonstraatio 3, 7.5.2026

1. Olkoon  $H$  Heavisiden funktio. Varmista että kaava

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

pitää paikkansa. Laske tämän jälkeen kaavan kummankin puolen Fourier-muunnokset käyttämällä oikealla puolella lineaarisuutta ja aikasiirtoa. Merkitse funktion  $H$  Fourier-muunnosta  $\hat{H}$ :lla. Minkä lausekkeen saat näin  $\hat{H}$ :lle?

Mallivastaus: Kaavan todetaan oikeaksi tarkistamalla se kun  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $x = \pm\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , ja  $x > \frac{1}{2}$ . Kun esimerkiksi  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , on  $\Pi(x) = 1$  ja myös  $H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 - 0 = 1$ .

Fourier-muunnokset laskemalla saadaan

$$\text{sinc } y = \hat{H}(y)e^{\pi iy} - \hat{H}(y)e^{-\pi iy} = \hat{H}(y) \cdot 2i \sin \pi y,$$

josta

$$\hat{H}(y) = \text{sinc } y \frac{1}{2i \sin \pi y} = \frac{1}{2\pi iy}.$$

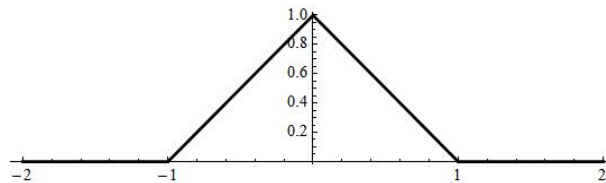
**Huomautus:** Näin saatu muoto on virheellinen. Virhe johtuu siitä, että  $\Pi$ -funktion esittäminen Heavisiden funktion avulla ja Fourier-muunnoksen laskeminen sitä kautta johtaa kahteen hajaantuvaan integraaliin. Oikea muoto on esitetty luennolla.

2. Piirrä kuvaaja kolmiopulssille

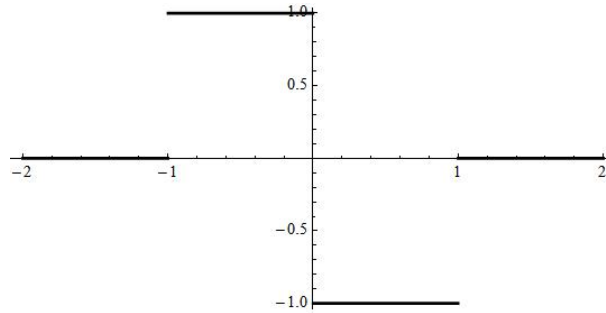
$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq -1 \\ x + 1, & \text{jos } x \in [-1, 0] \\ -x + 1, & \text{jos } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{jos } x \geq 1 \end{cases},$$

selvitä millaisen funktion  $f$  integraalifunktio  $\Lambda$  on, ja laske integrointiperiaatetta (vuoden 2019 Moniste C, esimerkki 52) käyttämällä  $\mathcal{F}[\Lambda(x)](y)$ . Ohje 1: Mieti ensin millainen olisi derivaattafunktio  $\Lambda$ :lle. Ohje 2: Funktion  $f$  esityksessä esiintyy suorakulmaisia pulsseja.

Mallivastaus: Kolmiopulssin kuvaaja on alla olevan kuvan mukainen:



Tästä derivoimalla saadaan funktio  $f(x)$ , joka on 0 aina kun  $|x| \geq 1$ , 1 kun  $x \in [-1, 0]$  ja  $-1$ , kun  $x \in [0, 1]$ :



Tämä funktio voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ja siis

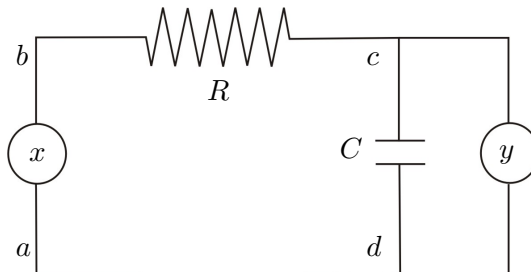
$$\Lambda(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Koska  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , voidaan käyttää integrointiperiaatetta sen yksinkertaisessa muodossa ilman  $\delta$ -funktiota ja täten (myös modulaatioperiaatetta käyttäen) saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Lambda(x)](y) &= \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(t) dt\right] = \frac{1}{2\pi iy} \mathcal{F}[f(x)](y) \\ &= \frac{1}{2\pi iy} \mathcal{F}\left[\Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi iy} (\text{sinc}(y)e^{i\pi y} - \text{sinc}(y)e^{-i\pi y}) \\ &= \frac{1}{\pi y} \text{sinc}(y) \frac{1}{2i} (e^{i\pi y} - e^{-i\pi y}) \\ &= \frac{1}{\pi y} \text{sinc}(y) \sin(\pi y) = \text{sinc}^2 y. \end{aligned}$$

3. Kirjoita differentiaaliyhtälö kuvan piirin syöttöjännitteen  $x$  (input) ja mitatavan jännitteen  $y$  (output) välille ja tulkitse piiri signaalia muokkaavaksi laitteeksi: jännite  $x$  olkoon syöte ja  $y$  tuloste. Selvitä millä tavalla  $y(t)$ :n spektri  $Y(f)$  riippuu  $x(t)$ :n spektristä  $X(f)$ . Selvitä lopuksi miten  $y(t)$ :n amplitudispektri voidaan esittää  $x(t)$ :n amplitudispektrin avulla.

Ohje: Jännite  $y$  on sama kuin pisteiden  $c$  ja  $d$  välinen jännite. Merkitse piirissä  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  kulkevaa virtaa  $I$ :llä ja käytä Kirchhoffin sääntöjä sekä sähkötekniikan perusyhtälöitä  $U = RI$ ,  $U = \frac{Q}{C}$  ja  $I = C \frac{dU}{dt}$ . Mittarin  $y$  kautta kulkeva virta oletetaan nolaksi (yhtälöksi pitäisi saada  $x = RCy' + y$ ). Laske saadusta differentiaaliyhtälöstä Fourier-muunnokset ja lopuksi spektrien itseisarvot.



Mallivastaus:  $x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y$ .

Merkitään  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)](f)$  ja  $Y(f) = \mathcal{F}[y(t)](f)$ , jolloin

$$X = RC \cdot 2\pi i f Y + Y = (2\pi i f RC + 1)Y$$

ja siis

$$Y = \frac{1}{2\pi i f RC + 1} X,$$

mistä

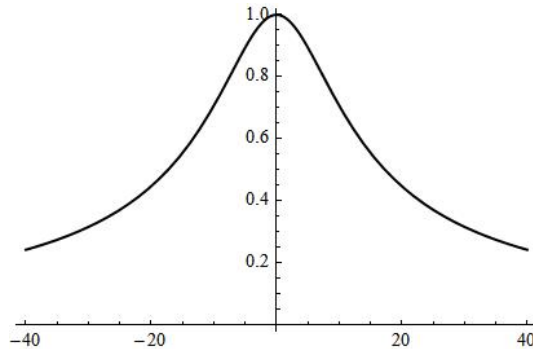
$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC f)^2}} |X|.$$

Jos merkitään  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ , saa viimeisin yhtälö muodon

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}} |X|.$$

**Tulkintaa:** Funktion  $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}}$  graafinen esitys (alla kuva arvolla

$f_0 = 10$ ) tarjoaa selityksen siihen, miksi tehtävän piiriä kutsutaan *alipäästö-suodattimeksi*. Funktion  $H(f)$  arvo on lähellä lukua 1 kun taajuus  $f$  on lähellä nolla, mutta  $f$ :n kasvaessa itseisarvoltaan suuremmaksi arvon  $H(f)$  lähenee nollaa.



Mikäli tehtävän piiri ajatellaan laitteeksi, joka muokkaa lähtöjännitteestä  $x$  (input) tulostejännitteen (output), voidaan todeta että yhtälön  $|Y| = H(f) |X|$  perusteella lähellä nollaa olevat taajuudet signaalissa  $x$  eivät vaimene paljoakaan, mutta kaukana nollassa olevat taajuudet vaimenevat paljon:  $H(f)$  toimii vaimennuskertoimena.  $H(f)$  onkin ideaalisen pulssifunktion reaalinen vastine, joka voidaan toteuttaa passiivisilla (eivät tarvitse ulkoista virtalähdettä) komponenteilla tässä tapauksessa, jossa signaalia edustaa jännitteen vaihtelu.

4. Signaalista  $f(x)$  on saatu 1000 näytettä aikavälillä  $[0, 1]$  tasaisin väliajoin, mikä merkitsee sitä, että signaalia esittää jono  $(f_0, f_1, \dots, f_{999})$ . Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos on jono  $(F_0, F_1, \dots, F_{999})$ . Minkä taajuuden amplitudia tällöin edustavat  $F_{30}$ ,  $F_{150}$ ,  $F_{768}$  ja  $F_{922}$ ?

Mallivastaus: Taajuudet ovat 30, 150,  $1000 - 768 = 232$  ja  $1000 - 922 = 78$

5. Signaalista  $s_{230}(x) = \sin(2\pi \cdot 230x)$  otetaan näytteitä tasavälein alkaen pisteestä  $x = 0$ , mikä on näytteenottotaajuuden oltava, että alkuperäinen signaali voitaisiin rekonstruoida?

Näytteitä otetaan kuitenkin taajuudella 120. Etsi taajuuden 230 alittavat sini-funktiot jotka tällöin antavat samat näytteet kuin  $s_{230}(x)$ .

Mallivastaus: Näytteenottotaajuuden on oltava enemmän kuin  $2 \cdot 230 = 460$ .

Jos näytteenottotaajuus on 120, näytteitä otetaan pisteissä  $\frac{n}{120}$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$  ja

$$d_n = \sin(2\pi \cdot 230 \cdot \frac{n}{120}) = \sin(2\pi(230 \cdot \frac{n}{120} - mn)) = \sin(2\pi(230 - 120m) \frac{n}{120}).$$

Arvo  $m = 1$  tuottaa taajuuden 110.

6. *Neoconocephalus robustus* -lajin hepokatti tuottaa 6,6 kHz taajuisen, yli kilometrin päähän kuuluvan äänen. *Nikon Coolpix 5200* -kameran mikrofoni ei silti taltioi sen ääntä edes lähietäisyydeltä. Mitä voidaan tällöin päätellä taajuudesta, jolla mikrofoni taltioi ääninäytteitä?

Mallivastaus: Taltiointitaajuus on pienempi kuin  $2 \cdot 6,6 \text{ kHz} = 13,2 \text{ kHz}$ .

7. Etsi  $2 \times 2$ -matriisi  $U$ , joka toteuttaa 2-pituisten jonojen diskreetin Fourier-muunnoksen:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on  $U$ :n käänteismatriisi? Ohje: Määritä ensin muunnos luonnollisen kannan vektoreille  $(1, 0)^T$  ja  $(0, 1)^T$ .

Mallivastaus: Jos  $(F_0, F_1) = \text{DFT}(f_0, f_1)$ , on

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 + f_1)$$

ja

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 - f_1)$$

mistä voidaan laskea  $\text{DFT}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  sekä  $\text{DFT}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ . Näin ollen

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tästä voidaan määrittää  $U^{-1} = U$ .

8. Olkoon  $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  ja  $(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) = \text{DFT}(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ . Sijoita summaan

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}$$

lauseke  $F_{l-r}$ :lle, vaihda summausjärjestys ja sievennä mahdollisimman pitkälle. Tulkitse näin saatu yhtälö vertaamalla sitä Fourier-muunnosten konvoluutioon.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k(l-r)}{N}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} e^{\frac{2\pi i k r}{N}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r e^{\frac{2\pi i k r}{N}}}_{g_k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}}.
 \end{aligned}$$

Viimeisin lauseke on tulojonon  $(f_0 g_0, f_1 g_1, \dots, f_{N-1} g_{N-1})$  diskreetin Fourier-muunnoksen  $l$ :s alkio. Saatu kaava on siis diskreettien Fourier-muunnosten konvoluutio.

9. Laske jonon  $(4, 0, 4, 1)$  diskreetti Fourier-muunnos käyttämällä FFT-algoritmia.

Mallivastaus: Lasketaan ensin FFT(4, 4) ja FFT(0, 1). Ensimmäistä varten todetaan, että FFT(4) = (4), joten

$$\text{FFT}(4, 4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2}} \cdot 4, 4 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2}} \cdot 4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(8, 0).$$

Samoin FFT(0) = (0) ja FFT(1) = (1), joten

$$\text{FFT}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2}} \cdot 1, 0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2}} \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Täten

$$\begin{aligned}
 &\text{FFT}(4, 0, 4, 1) \\
 &= \frac{1}{2}(8 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{4}} \cdot 1, 0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{4}} \cdot (-1), 8 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 2}{4}} \cdot 1, 0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 3}{4}} \cdot (-1)) \\
 &= \frac{1}{2}(8 + 1, i, 8 - 1, -i) = \frac{1}{2}(9, i, 7, -i).
 \end{aligned}$$