# Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

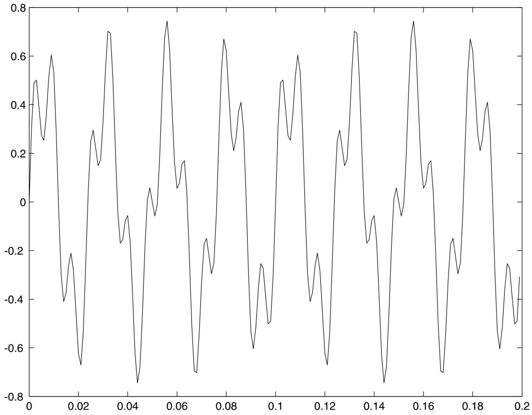
Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Signaali

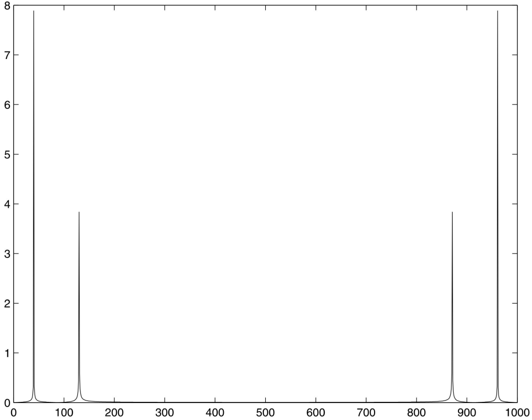
$$s(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi \cdot 130t)$$



Signaalin

$$s(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi \cdot 130t)$$

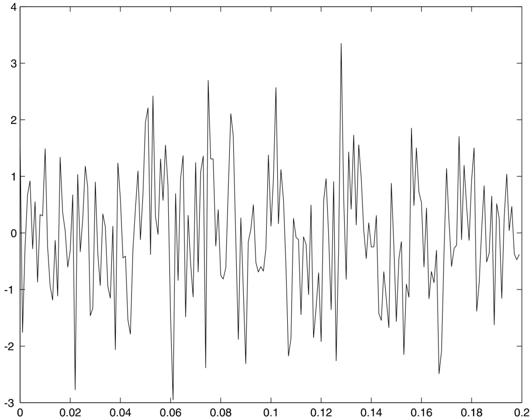
*(amplitudi)spektri*:



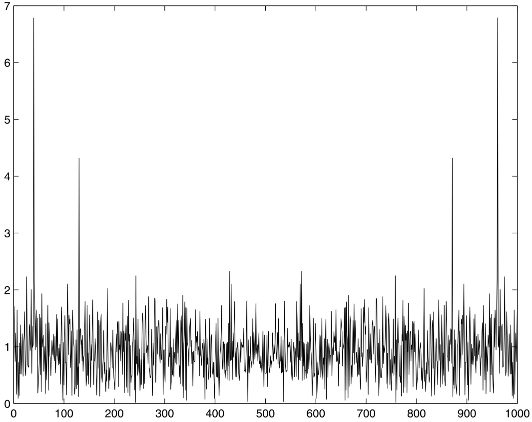
Signaali

$$s(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi \cdot 130t)$$

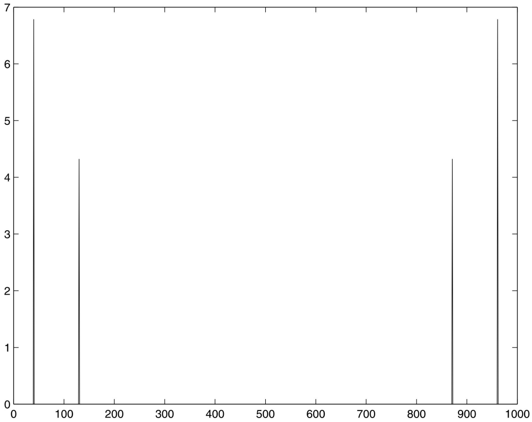
plus kohina (white noise):



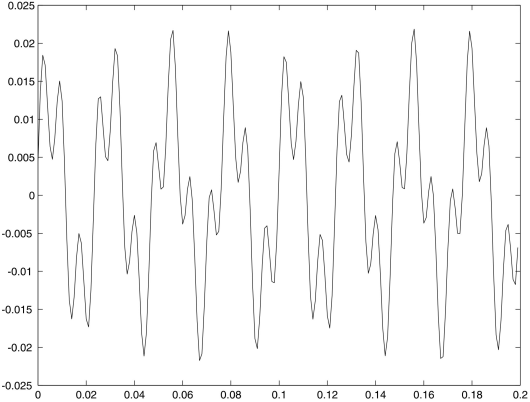
Edellisen (amplitudi)spektri



Spektri "puhdistettuna"



Tästä rekonstruoitu signaali



# Sarjoista

## Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

## Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} f(x)\,dx.$$

Sarja määritellään analogisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} a_n.$$

# Sarjoista

## Lause

Jos $f$ on vähenevä ja $f(x) \geq 0$, on

$$\int_1^\infty f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq f(1) + \int_1^\infty f(t)\,dt$$

## Integraaliesitys

Summaesitys

$$F(x) = a_1 f(1, x) + a_2 f(2, x) + \ldots + a_n f(n, x)$$

voidaan yleistää integraaliksi

$$F(x) = \int_a^b a(t) f(t, x)\, dt,$$

mikä voidaan vielä yleistää I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

$$F(x) = \int_a^\infty a(t) f(t, x)\, dt.$$

## Sarjaesitys

Summaesitys

$$F(x) = a_1 f(1, x) + a_2 f(2, x) + \ldots + a_n f(n, x)$$

voidaan yleistää myös sarjaksi:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(n, x).$$

# Funktioiden esityksistä

## Yhteenveto

- Summa: $F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)$
- Sarja: $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$
- Integraali: $F(x) = \int_a^b a(t) f(t,x)\, dt$
- Epäoleellinen integraali: $F(x) = \int_1^{\infty} a(t) f(t,x)\, dt$

# Määritelmiä

## sin, cos, exp

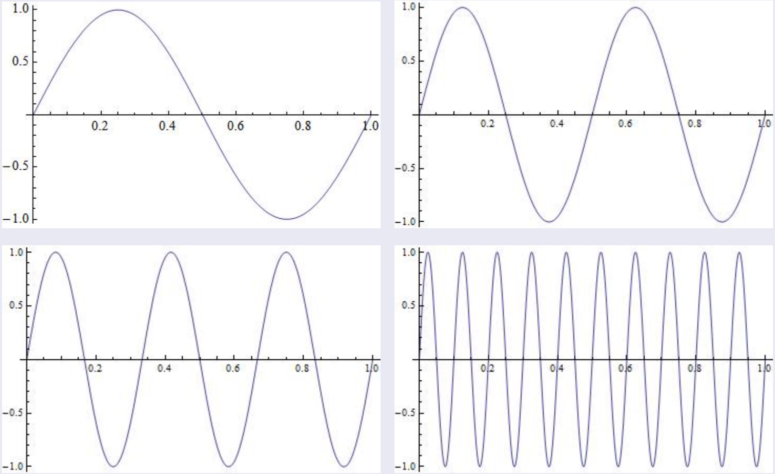
- $f$-taajuinen sinifunktio $s_f(x) = \sin(2\pi fx)$
- $f$-taajuinen kosinifunktio $c_f(x) = \cos(2\pi fx)$
- $f$-taajuiset eksponenttifunktiot $e_{+f}(x) = e^{2\pi ifx}$ ja $e_{-f}(x) = e^{-2\pi ifx}$

## Eulerin kaava:

$$e_{+f}(x) = c_f(x) + is_f(x) \quad \text{ja} \quad e_{-f}(x) = c_f(x) - is_f(x)$$

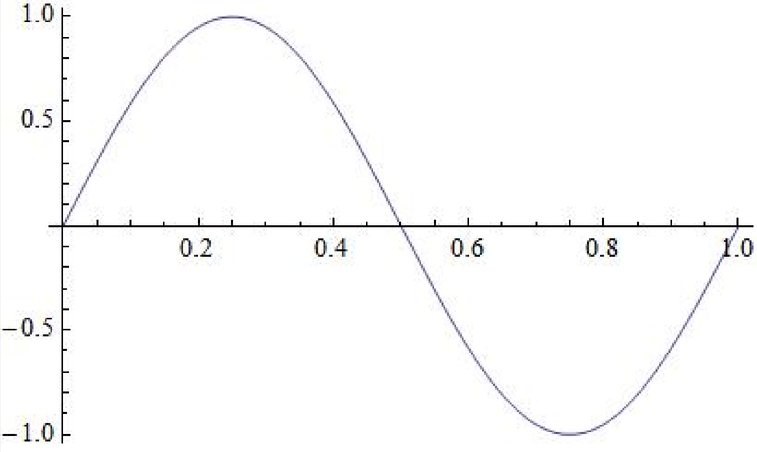
$$c_f(x) = \frac{1}{2}(e_{+f}(x) + e_{-f}(x)) \quad \text{ja} \quad s_f(x) = \frac{1}{2i}(e_{+f}(x) - e_{-f}(x))$$

## $s_1(x)$,$s_2(x)$, $s_3(x)$, $s_{10}(x)$



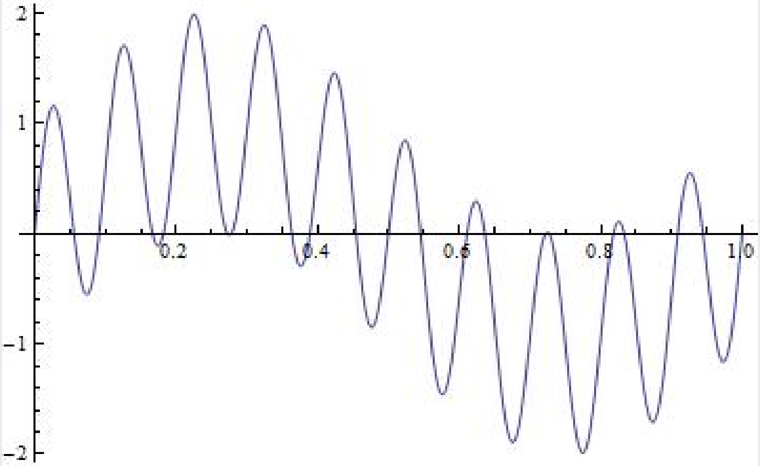
# Fourier-analyysi

## $s_1(x)$



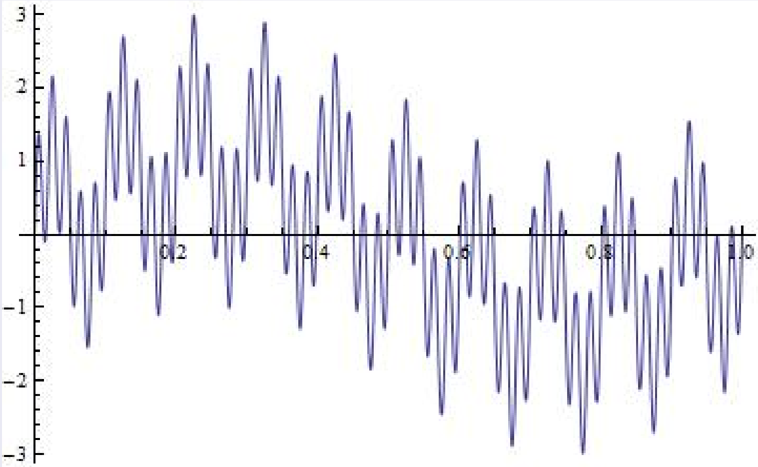
## Fourier-analyysi

### $s_1(x) + s_{10}(x)$

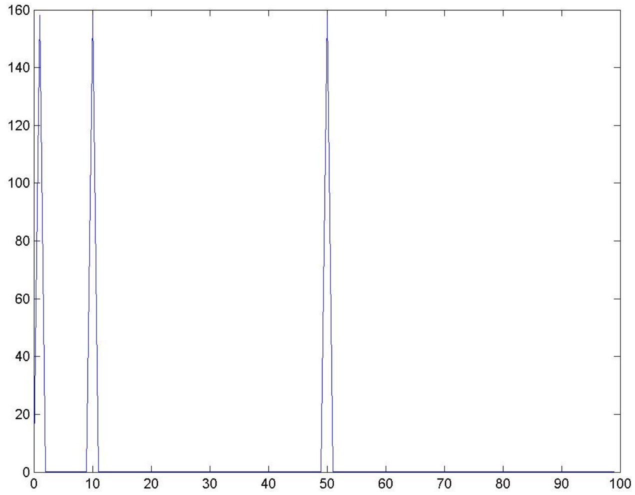


# Fourier-analyysi

## $s_1(x) + s_{10}(x) + s_{50}(x)$



## Amplitudispektri (osittain)



**Lause**

$f$-taajuisilla sini-, kosini- ja eksponenttifunktioilla on jakso $T = \frac{1}{f}$.

**Todistus (vain $s_f$:lle)**

$$s_f(x + \frac{1}{f}) = \sin(2\pi f(x + \frac{1}{f})) = \sin(2\pi fx + 2\pi) = \sin(2\pi fx) = s_f(x)$$

**Seuraus**

Funktioilla $s_{\frac{n}{T}}(x)$, $c_{\frac{n}{T}}(x)$, ja $e_{\frac{n}{T}}(x)$ on jakso $T$.

**Todistus (vain $s$:lle)**

$$\begin{aligned} s_{\frac{n}{T}}(x + T) &= \sin(2\pi\frac{n}{T}(x + T)) \\ &= \sin(2\pi\frac{n}{T}x + 2\pi n) = \sin(2\pi\frac{n}{T}x) = s_{\frac{n}{T}}(x). \end{aligned}$$

## Lause

$T$-jaksoiselle eksponenttifunktiolle pätee

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{\frac{2\pi i n}{T}x}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{jos } n \neq 0 \\ T, & \text{jos } n = 0 \end{cases}$$

## Määritelmä

Fourier-sarjoille kahteen suuntaan ääretön sarja tarkoittaa (poikkeuksellisesti) seuraavaa:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=-M}^{M} F_n.$$

# Fourier-sarjat

## Määritelmä

$T$-jaksoisen funktion Fourier-sarja on

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T}x}.$$

Lukuja $F_n \in \mathbb{C}$ kutsutaan funktion $f$ Fourier-kertoimiksi tai spektriksi. Jos $F_n \neq 0$ tai $F_{-n} \neq 0$, sanotaan, että funktiossa $f$ esiintyy taajuus $\frac{n}{T} = nf$. Kertoimia $F_{\pm n}$ sanotaan myös taajuuden $\frac{n}{T}$ amplitudeiksi.

## Huomautus

Koska kaikki osafunktiot ovat $T$-jaksoisia, on myös summafunktio (mikäli suppenee) sellainen.

# Fourier-sarjat

## Kertoimien $F_n$ selvittäminen

Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

pitäisi olla

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x}\, dx$$

## Huomautus

Luku $\alpha$ on vapaasti valittavissa. Luvun $\alpha$ kiinnittäminen määrää "ikkunan" $[\alpha, \alpha + T]$, josta funktiota $f$ tarkastellaan. Tyypillisiä valintoja ovat $\alpha = 0$ ja $\alpha = -\frac{T}{2}$.

## Määritelmä

$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$ ja $f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$

## Lause

Olkoon $f$ $T$-jaksoinen funktio, jolle toispuoleiset derivaatat ovat olemassa. Olkoon lisäksi

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)e^{-\frac{2\pi in}{T}x}\,dx.$$

Tällöin sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}$$

suppenee pisteessä $x_0$ kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-))$.

## Reaalinen muoto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T}x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + B_n \sin\frac{2\pi n}{T}x),$$

missä $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$.

## Lause

Jos $f$ on reaaliarvoinen, ovat $A_n$ ja $B_n$ reaalisia.