

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Esimerkki

Esimerkit 47–49

Esimerkki

$$f * \delta$$

Määritelmä

$$H(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0 \end{cases}$$

Määritelmä

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x),$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t)dt$$

Esimerkki 50

Parsevalin kaava:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{G(y)} dy$$

Esimerkki 52

Derivointiperiaate:

$$\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi iy\mathcal{F}[f(x)](y)$$

Integrintiperiaate ?

Signaali käytännössä

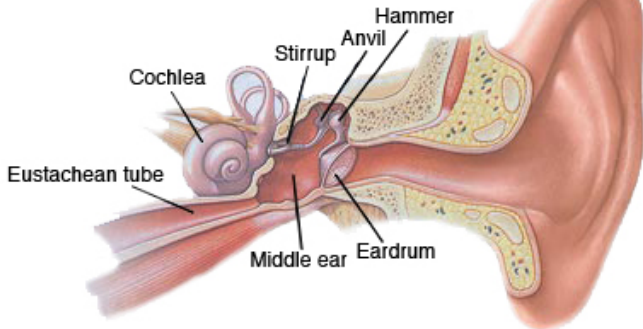
Sovelluksissa f on yleensä ajan myötä muuttuva fysikaalinen suure. Esimerkiksi

- Ilmanpaineen vaihtelu (ääni)
- Jännitteen vaihtelu (lankapuhelimet, DSL-linjat)
- Sähkö- ja magneettikentän vaihtelu (esim. valo, radioaallot)

Huomautus

Sovelluksissa ei yleensä voida saada eksplisiittistä lauseketta $f(x)$:lle. Tästä seuraa, että spektrin laskeminen tavallisin differentiaali- ja integraalilaskennan keinoin analyttisesti ei onnistu.

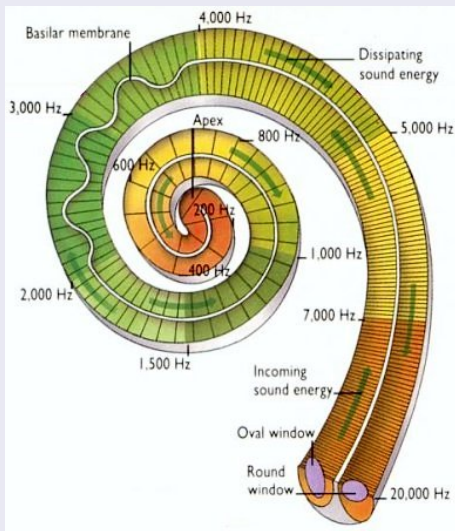
Korvan rakenne



© Mayo Foundation for Medical Education and Research. All rights reserved.

Analoginen "Fourier-muunnin"

Korvasimpukka



Signaali käytännössä

- Sovelluksissa ei voida yleensä tuntea signaalia $f(x)$ miten tarkasti tahansa.
- Käytännössä joudutaan tyytymään *näytteisiin* $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... ja vieläpä näidenkin likiarvoihin.
- Signaalin korkeat taajuudet jäävät taltioimatta. Määre "korkeat", riippuu näytteenottopisteiden x_0 , x_1 , x_2 , ... välistä.
- Esimerkki: CD-audio -standardia varten mikrofonin tulee taltioida ilmanpaineen arvo 44100 kertaa sekunnissa. Kukin taltiointi (näyte) esitetään 16 bittiä käyttäen. Stereoääntä varten tarvitaan tällöin $2 \cdot 44100 \cdot 16$ b (≈ 172 kB) sekunnissa.

Määritelmä

Sanotaan, että funktio

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy$$

sisältää taajuuden y , jos $F(y) \neq 0$ tai $F(-y) \neq 0$.

Jos funktio f ei sisällä B :tä korkeampia taajuuksia, on siis $F(y) = 0$, kun $|y| \geq B$

Esimerkki

Esimerkki 55

Nyquistin-Shannonin näytteenottolause

Jos funktio f ei sisällä B :tä eikä sitä korkeampia taajuuksia, voidaan f epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta selvittää arvoista

$$d_n = f\left(\frac{n}{2B}\right).$$

Lisäksi pätee (Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n)$$

Huomaus

Nyquistin-Shannonin näytteenottolauseessa esiintyvää taajuutta $2B$ kutsutaan Nyquistin näytteenottotaajuudeksi ja väliä $\frac{1}{2B}$ sanotaan Nyquistin näytteenottoväliksi.

Nyquistin-Shannonin lauseen todistus

- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy = \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy.$
- Arvot $\frac{d_{-n}}{2B} = \frac{1}{2B}f\left(\frac{-n}{2B}\right) = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B F(y)e^{-\frac{2\pi in}{2B}y} dy$ ovat spektrin $F(y)$ Fourier-sarjan kertoimet, joten

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi in}{2B}y}.$$

- $f(x) = \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy = \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n).$

Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava

Kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta\left(x - \frac{n}{2B}\right) \right) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx) \end{aligned}$$

Huomaus

Jos $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(y)](x)$, on

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(y) \cdot \Pi\left(\frac{y}{2B}\right)\right](x) = f(x) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx)$$

Tulkinta

Näytteistä $d_n = f\left(\frac{n}{2B}\right)$ rekonstruoidaan alkuperäinen signaali seuraavasti:

- Muodostetaan “Diracin kampa”

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta\left(x - \frac{n}{2B}\right)$$

- Leikataan tästä taajuuden B ylittävät osat kertomalla spektri pulssifunktiolla $\Pi\left(\frac{y}{2B}\right)$.
- Tulos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta\left(x - \frac{n}{2B}\right) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx).$$