Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2026

Jatkuvan ja pistespektrin yhdistäminen

Fourierin integraali

Integraalissa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy}\, dy$$

spektri $F(y)$ on määritelty kaikilla $y \in \mathbb{R}$ (jatkuva spektri).

Fourierin sarja

Sarjassa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}$$

spektri F_n on määritelty vain n:n kokonaislukuarvoilla (F_n vastaa taajuutta $\frac{n}{T}$). Tätä kutsutaan pistespektriksi.

Jatkuvan ja pistespektrin yhdistäminen

Pistespektri integraalissa

Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T}x},$$

määritellään

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(y - \frac{n}{T})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i x y}\, dy?$$

Esimerkki

Esimerkki 56

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Signaali f on aikarajoitettu, jos on sellainen väli $[0, M]$, että $f(x) = 0$ aina kun $x \notin [0, M]$.

Tasaväliset näytteet

Olkoon f aikarajoitettu välille $[0, M]$ ja $M = N \cdot \Delta x$. Merkitään $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(\Delta x)$, $f_2 = f(2 \cdot \Delta x)$, ..., $f_{N-1} = f((N-1)\Delta x)$

Huomatus

Nyquistin-Shannonin lauseen mukaan vain arvoa $B = \frac{1}{2\Delta x}$ matalammat taajuudet voidaan rekonstruoida.

Huomautus

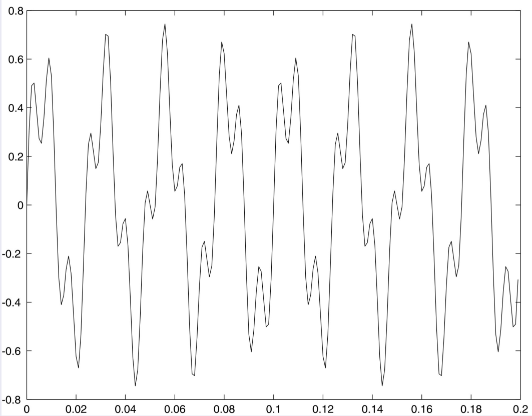
Spektrin rekonstruktio Fourier-sarjana

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi i n}{2B} y}.$$

on $2B$-jaksoinen funktio ja tätä voidaan tarkastella välillä $[-B, B]$ tai yhtä hyvin välillä $[0, 2B]$.
Valitaan spektrin tarkasteluväliksi $[0, 2B]$ symmetrian vuoksi.

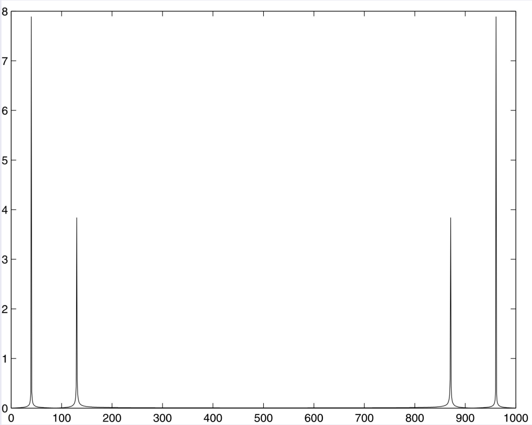
Signaali

$\frac{1}{2}s_{40}(t) + \frac{1}{4}s_{130}(t)$



Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Signaalin $\frac{1}{2}s_{40}(t) + \frac{1}{4}s_{130}(t)$ amplitudispektri



Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Ongelma: DFT:n muotoilu

Jos $M = N \cdot \Delta x$ ja signaalista tunnetaan vain arvot $f_0 = (0 \cdot \Delta x)$, $f_1 = (1 \cdot \Delta x)$, $f_2 = f(2 \cdot \Delta x)$, ..., $f_{N-1} = f((N-1) \cdot \Delta x)$, kuinka tiheästi voidaan spektrin arvo määrittää välillä $[0, 2B]$?

Duaaliperiaate

Tarkastellaan spektriä F välillä $[0, 2B]$ määriteltynä funktiona ja $f(-x)$:ää tämän välillä $[-M, 0]$ (tai välillä $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$) määriteltynä spektrinä. Tällöin voidaan välein $\Delta y = \frac{1}{2 \cdot \frac{M}{2}} = \frac{1}{M} = \frac{1}{N\Delta x}$ rekisteröidyistä F:n arvoista rekonstruoida F uudelleen.

DFT:n muotoilu

Asetetaan $\Delta y = \frac{1}{N\Delta x}$ ja lasketaan spektrin arvot pisteissä $0 \cdot \Delta y$, $1 \cdot \Delta y$, ..., $(N-1) \cdot \Delta y$. Valitaan symmetrian vuoksi $\Delta y = \Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

DFT:n muotoilu

Integraalia

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx = \int_{0}^{N\Delta x} f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx$$

approksimoidaan Riemann-summalla

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta x)e^{-2\pi ik\Delta x\cdot y}\Delta x$$

ja tälle lausekkeelle lasketaan arvo F_l pisteissä $y = l\cdot\Delta y$. Tällöin

$$F_l = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi ik\Delta x\cdot l\cdot\Delta y}\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i\frac{k\cdot l}{N}}.$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Jonon $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$, missä

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Jonon $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on jono $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, missä

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) = \mathrm{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Olkoon $S_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Äärellisen joukon k-taajuinen eksponenttifunktio on

$$e_k(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

Huomautus

$$e_{N-k}(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{(N-k)l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i l} e^{2\pi i \frac{-kl}{N}} = e_{-k}(l)$$

Seuraus (N-jaksollisuus)

$$e_k(l+N) = e_k(l)$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{jos } 1 \leq l < N \\ \mathrm{N}, & \text{jos } l = 0 \end{cases}$$

Todistus

Tapaus $l = 0$ on ilmeinen. Jos $l \neq 0$, on $e^{\frac{2\pi il}{N}} \neq 1$ ja

$$e^{\frac{2\pi il}{N}} S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi il}{N}} e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i(k+1)l}{N}} = S$$

Täten

$$(e^{\frac{2\pi il}{N}} - 1)S = 0,$$

mistä seuraa, että $S = 0$.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$\mathrm{DFT}^{-1}\,\mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Todistus

Merkitään $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ ja lasketaan jonon $\mathrm{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ k:s jäsen g_k:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi iml}{N}} \right) e^{\frac{2\pi ikl}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi il(k-m)}{N}} = f_k \end{aligned}$$

Esimerkki

Esimerkki 57

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Huomautus

Jos jokainen F_l lasketaan esityksen

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}$$

mukaisesti, pitää jonon $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ määrittämiseksi suorittaa likimain $N \cdot 2N = 2N^2$ yhteen- ja kertolaskua. Lisäksi pitää laskea eksponenttifunktion arvot.

Fast Fourier Transform (FFT)

Hajoita ja hallitse -menetelmä

Ongelman ratkaisua varten

- Syöte S hajoitetaan osiin S_1 ja S_2
- Ratkaistaan ongelma osille S_1 ja S_2 erikseen
- Yhdistetään osaratkaisut

DFT:n hajoitus

$$
\begin{aligned}
F_l &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k\cdot l}{N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{2m\cdot l}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{(2m+1)\cdot l}{N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{N/2}}\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{m\cdot l}{N/2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \frac{l}{N}} \frac{1}{\sqrt{N/2}}\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{m\cdot l}{N/2}}
\end{aligned}
$$

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$
Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos
$(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$.

- Jos $N = 1$, tulosta f_0 ja pysähdy.
- Jos $N > 1$, laske $(G_0, G_1, \ldots, G_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_2, \ldots, f_{N-2})$ ja $(H_0, H_1, \ldots, H_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$.
- Jokaista $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ kohti laske $F_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_l + e^{-2\pi i \frac{l}{N}} H_l)$. Luvun $N/2 - 1$ ylittäville l:n arvoille tulkitaan $G_l = G_{l-N/2}$ ja $H_l = H_{l-N/2}$.
- Tulosta $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$.

Fast Fourier Transform

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\
&= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\
&= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N = 8(2T(N/16) + 4 \cdot N/8) + 3 \cdot 4N \\
&= 16T(N/16) + 4 \cdot 4N = \dots \\
&= 2^r T(N/2^r) + r \cdot 4N \\
&= NT(1) + r \cdot 4N = 4N \log_2 N
\end{aligned}$$