

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2025

Demonstraatio 2, 20.11.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä vaan omaasi.

1. Määritellään lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seuraavasti:

$$T(x, y) = (7x - 6y, 12x - 10y).$$

Määritä lineaarikuvauksen matriisi A luonnollisen kannan $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ suhteen (sama kanta sekä lähtö- että kuva-avaruudessa) ja esitä lineaarikuvaus matriisikertolaskuna $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, missä $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat sarakevektoreita.

2. Valitaan avaruudelle $\mathbb{R}^2$ kanta $B = \{(2, 3), (3, 4)\}$. Selitä ensiksi (lyhyesti) miksi B todella on kanta ja etsi sitten edellisen tehtävän lineaarikuvauksen matriisi kannan B suhteen (sama kanta sekä lähtö- että kuva-avaruudessa).
3. Olkoon P_4 korkeintaan astetta 3 olevien reaalikertoimisten polynomien joukko ja sen kanta $B = \{1, x, x^2, x^3\}$. Selvitä lyhyesti miksi derivaattaoperaatio $\frac{d}{dx} : P_4 \rightarrow P_4$ on lineaarinen ja selvitä sen matriisi kannan B suhteen (sama kanta alkukuvalle ja kuvalle). Ohje: Laske kantapolynomeille derivaatat ja esitä nämä kannan B avulla. Lineaarikuvauksen matriisi saadaan kirjoittamalla kuvavektoreiden koordinaattivektorit sarakkeiksi.
4. Määritellään differenssioperaatio Δ reaalikertoimisten polynomien muodostamassa vektoriavaruudessa seuraavasti $\Delta p(x) = p(x+1) - p(x)$. Osoita, että Δ on lineaarinen ja määritä differenssioperaation matriisi edellisen tehtävän kannan suhteen (sama kanta alkukuvalle ja kuvalle).
5. laske $\Delta 1$ (vakiopolynomi 1), Δx , $\Delta x(x-1)$ ja $\Delta x(x-1)(x-2)$.
6. Valitaan edellisten tehtävien avaruudelle P_4 kanta $C = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$. Määritä kuvaukselle Δ matriisi kannan C suhteen. Ohje: Lineaarikuvauksen matriisi saadaan kirjoittamalla kuvavektoreiden koordinaattivektorit sarakkeiksi.
7. $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ja $C = \{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}\}$ ovat molemmat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja. Mikä on kannanvaihdon $B \rightarrow C$ matriisi? Ohje: Vektorin (x, y) koordinaattivektori luonnollisessa kannassa on (x, y) . Selvitä itse tai tarkista aiemmilta luennoilta, mikä on vektorin (x, y) koordinaattivektori kannassa C .

Toisin: Etsi vektoreiden $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ esitykset kannassa C ja kirjoita näiden koordinaattivektorit sarakkeiksi.

8. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Laske (käyttämättä ohjelmistoa) seuraavista ne, jotka on määritelty: AB , BA , A^2 , $5B$, $B^T + A$, $A^T A$.

9. Laske (ilman ohjelmistoa)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$