

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2025

Demonstraatio 3, 27.11.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi. Ellei toisin mainita, tehtävät tulee tehdä käsin laskemalla.

1. Käytä luennolla esitettyä Gaussin-Jordanin menetelmää käänteismatriisin etsimiseksi matriisille $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, mikäli olemassa
2. Käytä Gaussin-Jordanin menetelmää käänteismatriisin etsimiseksi matriisille $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, mikäli olemassa.
3. Käytä Gaussin-Jordanin menetelmää käänteismatriisin etsimiseksi matriisille $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, mikäli olemassa

4. Laske determinantit

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

ja

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}.$$

5. Selitä ainakin yhdellä tavalla miksi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Yllä olevassa merkinnässä asteriskit $*$ tarkoittavat mitä tahansa lukuja.

6. Määritä determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Ohje: Lisää aluksi 1. rivi toiseen luvulla $-a$ kerrottuna ja kolmanteen luvulla $-a^2$ kerrottuna. Käytä sarakekehitysmää ja determinantin ominaisuuksia.

7. Selvitä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot.

8. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ja $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ matriisin A määrittämä lineaarikuvaus ($\mathbf{x}$ esitetään sarakevektorina). Laske kuvat $f(\mathbf{i})$ ja $f(\mathbf{j})$, hahmottele näistä piirroskuva ja esitä kuvien perusteella arvaus kuvauksen f geometrisesta merkityksestä. Määritä lopuksi matriisin A ominaisarvot.

9. Olkoon $\theta \in [0, \pi]$. Määritä matriisin

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot. Millä parametrin θ arvolla ne voivat olla reaalisia?