

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2025

Demonstraatio 4, 4.12.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi. Ellei toisin mainita, tehtävät tulee suorittaa käsin laskemalla.

Demotehtävissä $1 - 5$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

on sama matriisi, jolle Demoissa 3 on määritetty ominaisarvot.

1. Etsi Matriisin A ominaisvektorit.
2. Esitä vektori $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ matriisin A ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa ja esitä lauseke

$$A^n \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

niinikään ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa.

3. Esitä matriiseille A similaarinen diagonaalimatriisi D ja matriisi P joka välittää diagonaalisuuden, ts. $A = PDP^{-1}$.
4. Matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Valitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannaksi $\mathcal{B}$ matriisin A ominaisvektoreiden muodostama kanta. Mikä on tämän lineaarikuvauksen matriisi kannan $\mathcal{B}$ suhteen?

5. Laske e^{tA} ja $\cos(tA)$. Ohje: Luento-esimerkki, joka koskee matriisia e^{tA} . Toinen kohta on samankaltainen.
6. Määritä matriisin

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko matriisi C diagonalisoituva?

7. Olkoon C edellisen tehtävän matriisi. Etsi sellainen matriisi P , että $P^{-1}CP = J$ on Jordan-lohkomuotoa. Ohje: Selvitä toisen kertaluvun ominaisvektorit ja etsi Jordanin ketju. Gaussin-Jordanin menetelmä redusoidun porrasmuodon ja käänteismatriisin etsimiseksi voidaan suorittaa matematiikkaohjelmalla.
8. Etsi sellainen symmetrinen matriisi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, että

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 + 2xy + 3y^2$$

Ohje. Laske vasemmanpuoleinen matriisikertolasku ja vertaa kertoimia.

9. Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit matematiikkaohjelmalla. Muodosta matriisi P , jossa sarakkeina ovat A :n ominaisvektorit, sijoita lausekkeeseen $3x^2 + 2xy + 3y^2$ uudet muuttujat x_1 ja a_2 , jotka saat yhtälöstä

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

ja sievennä lauseke. Mitä huomaat ”sekatermille” $2xy$ tapahtuvan sijoituksessa?