

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2025

Demonstraatio 4, 4.12.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi. Ellei toisin mainita, tehtävät tulee suorittaa käsin laskemalla.

Demotehtävissä 1 – 5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

on sama matriisi, jolle Demoissa 3 on määritetty ominaisarvot.

1. Etsi Matriisin A ominaisvektorit.

Mallivastaus: Ominaisarvoon $\lambda = -2$ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $(A + 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tämä voidaan tarkemmin muodossa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tätä vastaavasta yhtälöparista voidaan määrittää ominaisvektorit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvoon $\lambda = -1$ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tämä voidaan tarkemmin muodossa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tätä vastaavasta yhtälöparista voidaan määrittää ominaisvektorit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Esitä vektori $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ matriisin A ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa ja esitä lauseke

$$A^n \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

niinikään ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa.

Mallivastaus: Etsitään sellaiset luvut c_1 ja c_2 , että

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aiemmillä luennoilla esitetyn menetelmän mukaan tämä voidaan kirjoittaa tuntemattomien c_1 , c_2 yhtälöparina, josta Gaussin-Jordanin menetelmän avulla saadaan ratkaisu $(c_1, c_2) = (-2, 3)$. Näin ollen

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot (-1)^n \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Esitä matriiseille A similaarinen diagonaalimatriisi D ja matriisi P joka välittää diagonaalisuuden, ts. $A = PDP^{-1}$.

Mallivastaus P :n sarakkeet valitaan A :n ominaisvektoreista siten, että ne ovat lineaarisesti riippumattomat. Luennolla esitetyn lauseen mukaan erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomat, joten voidaan valita

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Valitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannaksi $\mathcal{B}$ matriisin A ominaisvektoreiden muodostama kanta. Mikä on tämän lineaarikuvauksen matriisi kannan $\mathcal{B}$ suhteen?

Mallivastaus: Koska lineaarikuvauksella kuvaa kantavektorin $(-1, 2)$ vektoriksi $-2(1, 2)$ ja kantavektorin $(-2, 3)$ vektoriksi $-(-2, 3)$, on kysytty matriisi

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Laske e^{tA} ja $\cos(tA)$. Ohje: Luento-esimerkki, joka koskee matriisia e^{tA} . Toinen kohta on samankaltainen.

Mallivastaus:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriisikertolaskulla tästä saadaan vielä muoto

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} + 4e^{-t} & -2e^{-2t} + 2e^{-t} \\ 6e^{-2t} - 6e^{-t} & 4e^{-2t} - 3e^{-t} \end{pmatrix}$$
$$\cos tA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-2t) & 0 \\ 0 & \cos(-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

joka saadaan matriisikertolaskuilla muotoon

$$\begin{pmatrix} 4 \cos t - 3 \cos(2t) & 2 \cos t - 2 \cos(2t) \\ -6 \cos t + 6 \cos(2t) & -3 \cos(3t) + 4 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

6. Määritä matriisin

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko matriisi C diagonalisoituva?

Mallivastaus: Matriisin C ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -4 \\ 9 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Ainoaan ominaisarvoon $\lambda = 2$ kuuluvat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $(C - 2\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ja tämä yhtälö on

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tätä vastaavasta yhtälöparista voidaan määrittää ominaisvektorit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Täten ainoaan ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvä vektoriavaruus on yksiulotteinen, eikä siis ominaisvektoreiden avulla voida muodostaa kaksiulotteisen vektoriavaruuden kantaa. Täten matriisi ei ole diagonalisoituva.

7. Olkoon C edellisen tehtävän matriisi. Etsi sellainen matriisi P , että $P^{-1}CP = J$ on Jordan-lohkomuotoa. Ohje: Selvitä toisen kertaluvun ominaisvektorit ja etsi Jordanin ketju. Gaussin-Jordanin menetelmä redusoidun porrasmuodon ja käänteismatriisin etsimiseksi voidaan suorittaa matematiikkaohjelmalla.

Mallivastaus: On löydettävä ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvä toisen kertaluvun ominaisvektori. Tämä saadaan yhtälön $(C - 2I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisusta. Koska $(C - 2I)^2 = 0$, kelpaa ratkaisuksi esim $(1, 0)^T$, joka siis valitaan 2. kertaluvun ominaisvektoriksi. Jordanin ketjua varten valitaan 1. kertaluvun ominaisvektoriksi $(C - 2I)(1, 0)^T = (-6, 9)$, ja matriisiksi P voidaan valita

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix},$$

jolloin

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Etsi sellainen symmetrinen matriisi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, että

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 + 2xy + 3y^2$$

Ohje. Laske vasemmanpuoleinen matriisikertolasku ja vertaa kertoimia.

Mallivastaus:

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2,$$

joten pitää valita $a = 3$, $b = 1$ ja $d = 3$. Matriisi A on siis

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit matematiikkaohjelmalla. Muodosta matriisi P , jossa sarakkeina ovat A :n ominaisvektorit, sijoita lausekkeeseen $3x^2 + 2xy + 3y^2$ uudet muuttujat x_1 ja y_1 , jotka saat yhtälöstä

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

ja sievennä lauseke. Mitä huomaat ”sekatermille” $2xy$ tapahtuvan sijoituksessa?

Mallivastaus: Matriisin A ominaisarvot ovat 4 ja 2 ja näihin liittyvät ominaisvektorit $(1, 1)^T$ ja $(1, -1)^T$. Täten matriisi P voidaan valita

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ja sijoitus tuottaa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix}$$

Sijoittamalla $x = x_1 + y_1$ ja $y = x_1 - y_1$ lausekkeeseen $3x^2 + 2xy + 3y^2$ ja sieventämällä saadaan $8x_1^2 + 4y_1^2$. Tästä lausekkeesta ei esiinny ”sekatermiä” x_1y_1 .